

# IX Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody drugiego stopnia  
(18 stycznia 2014 r.)



1. Czy istnieje taka trójka  $(a, b, c)$  dodatnich liczb nieparzystych, że

$$\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c} = \sqrt{a+b} ?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. W trapezie  $ABCD$  punkty  $M$  i  $N$  są środkami odpowiednio podstaw  $AB$  i  $CD$ . Punkt  $P$  należy do odcinka  $MN$ . Udowodnij, że trójkąty  $ADP$  i  $BCP$  mają równe pola.

3. W każde pole tablicy o wymiarach  $9 \times 9$  wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku? Odpowiedź uzasadnij.

4. Na płaszczyźnie zaznaczono  $n$  punktów ( $n \geq 3$ ), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

5. W trójkącie  $ABC$  punkt  $D$  jest środkiem boku  $AB$ , a punkt  $E$  jest środkiem odcinka  $CD$ . Wykaż, że jeżeli  $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$ , to  $AC = CD$ .