XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(14 stycznia 2017 r.)

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

1. W każde pole tablicy 4×4 należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne? Odpowiedź uzasadnij.

2. Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości ramion tego trapezu.

3. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, d. Wiadomo, że liczba $a+b$ jest podzielna przez d, a liczba $a\cdot b$ jest podzielna przez d^2. Udowodnij, że każda z liczb a i b jest podzielna przez d.

4. Czy istnieją liczby $x_1, x_2, \ldots, x_{99}$, z których każda jest równa $\sqrt{2}+1$ lub $\sqrt{2}-1$ i które spełniają równość

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{98}x_{99}+x_{99}x_1=199\,?$$

Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, że każdy kąt wewnętrzny jego każdej ściany jest prosty lub rozwarty i który ma dokładnie 100 krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku