# XII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (14 stycznia 2017 r.)

**Szkice rozwiązań zadań konkursowych**

**1.** W każde pole tablicy $4\times 4$ należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne? Odpowiedź uzasadnij.

*Szkic rozwiązania*

Przypuśćmy, że sumy liczb w kolumnach są równe $2^{k_1}$, $2^{k_2}$, $2^{k_3}$, $2^{k_4}$, a sumy liczb w wierszach są równe $2^{w_1}$, $2^{w_2}$, $2^{w_3}$, $2^{w_4}$, przy czym $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$, $w_1$, $w_2$, $w_3$, $w_4$ to nieujemne liczby całkowite, z których każde dwie są różne. Przyjmijmy ponadto bez straty ogólności, że $k_1$ jest najmniejszą z tych ośmiu liczb.

Zapisując dwoma sposobami sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy, uzyskujemy równość

$$2^{k_1}+2^{k_2}+2^{k_3}+2^{k_4}=2^{w_1}+2^{w_2}+2^{w_3}+2^{w_4}.$$

Dzieląc tę równość stronami przez $2^{k_1}$, otrzymujemy

$$1+2^{k_2-k_1}+2^{k_3-k_1}+2^{k_4-k_1}=2^{w_1-k_1}+2^{w_2-k_1}+2^{w_3-k_1}+2^{w_4-k_1}.$$

Lewa strona powyższej zależności jest liczbą nieparzystą, a prawa — liczbą parzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie jest możliwe wpisanie liczb w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania.

**2.** Wykaż, że jeżeli przekątne pewnego trapezu są prostopadłe, to suma długości podstaw tego trapezu jest nie większa od sumy długości ramion tego trapezu.

*Szkic rozwiązania*

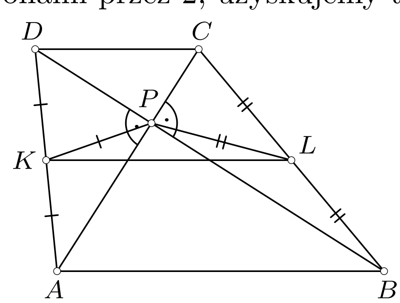
Niech $ABCD$ będzie trapezem o podstawach $AB$ i $CD$ oraz prostopadłych przekątnych przecinających się w punkcie $P$. Należy udowodnić, że $AD+BC\geqslant AB+CD$.

Oznaczmy przez $K$ i $L$ środki odpowiednio ramion $AD$ i $BC$ trapezu $ABCD$ (rys. 1).

Ponieważ trójkąty $ADP$ oraz $BCP$ są prostokątne, więc $PK=\frac{1}{2}AD$ oraz $PL=\frac{1}{2}BC$. Ponadto, odcinek $KL$ łączy środki ramion trapezu $ABCD$, więc $KL=\frac{1}{2}(AB+CD)$. Zapisując nierówność trójkąta $KLP$, otrzymujemy

$$PK+PL\geqslant KL, \quad \text{czyli} \quad \tfrac{1}{2}AD+\tfrac{1}{2}BC\geqslant \tfrac{1}{2}(AB+CD).$$

Mnożąc ostatnią nierówność stronami przez 2, uzyskujemy tezę zadania.




rys. 1

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

**3.** Dane są dodatnie liczby całkowite $a$, $b$, $d$. Wiadomo, że liczba $a+b$ jest podzielna przez $d$, a liczba $a\cdot b$ jest podzielna przez $d^2$. Udowodnij, że każda z liczb $a$ i $b$ jest podzielna przez $d$.

*Szkic rozwiązania*

Jeżeli $d=1$, to warunki zadania oczywiście są spełnione. W dalszej części rozwiązania przyjmijmy, że $d>1$.

Niech $p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$ będzie rozkładem liczby $d$ na czynniki pierwsze. Wykażemy najpierw, że obie liczby $a$ i $b$ są podzielne przez $p_1^{k_1}$.

Liczba $a\cdot b$ jest podzielna przez $d^2$, a więc jest także podzielna przez $p_1^{2k_1}$. Wobec tego liczba $p_1$ wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze liczby $a\cdot b$ z wykładnikiem większym lub równym $2k_1$. Stąd wniosek, że ta sama liczba pierwsza $p_1$ wchodzi do rozkładu na czynniki pierwsze co najmniej jednej z liczb $a$, $b$ z wykładnikiem większym lub równym $k_1$. To dowodzi, że co najmniej jedna z liczb $a$, $b$ jest podzielna przez $p_1^{k_1}$.

Przyjmijmy, bez straty ogólności, że liczba $a$ jest podzielna przez $p_1^{k_1}$. Ponieważ liczba $a+b$ jest podzielna przez $d$, więc jest podzielna także przez $p_1^{k_1}$. W związku z tym liczba $b=(a+b)-a$ jest także podzielna przez $p_1^{k_1}$.

Analogicznie dowodzimy, że liczby $a$, $b$ są podzielne przez każdą z liczb $p_2^{k_2}, p_3^{k_3},\ldots,p_n^{k_n}$. Ponieważ każde dwie spośród liczb $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_2}$, $\ldots$, $p_n^{k_n}$ są względnie pierwsze, więc obie liczby $a$, $b$ są podzielne przez iloczyn liczb $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_2}$, $\ldots$, $p_n^{k_n}$, czyli przez $d$.

*Uwaga*

W rozwiązaniu uzasadniliśmy, że jeśli $d$ jest potęgą liczby pierwszej, to z podzielności liczby $a\cdot b$ przez $d^2$ wynika, że co najmniej jedna z liczb $a$, $b$ jest podzielna przez $d$. Stwierdzenie to nie jest jednak prawdziwe dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej $d$. Na przykład dla $d=6$ liczba $4\cdot 9$ jest podzielna przez $6^2$, lecz żadna z liczb 4, 9 nie jest podzielna przez 6.

---

**4.** Czy istnieją liczby $x_1,x_2,\ldots,x_{99}$, z których każda jest równa $\sqrt{2}+1$ lub $\sqrt{2}-1$ i które spełniają równość

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{98}x_{99}+x_{99}x_1=199\,?$$

Odpowiedź uzasadnij.

*Szkic rozwiązania*

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją.

Przypuśćmy, że istnieje układ liczb $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_{99}$ spełniających warunki zadania.

Każdy z iloczynów $x_1x_2$, $x_2x_3$, $\ldots$, $x_{99}x_1$ przyjmuje jedną z trzech wartości:

$$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2},\quad (\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2},\quad (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1.$$

Niech $a$ będzie liczbą iloczynów równych $3+2\sqrt{2}$, $b$ — liczbą iloczynów równych $3-2\sqrt{2}$, natomiast $c$ — liczbą iloczynów równych 1. Ponieważ wszystkich iloczynów jest 99, więc

$$a+b+c=99\,.$$

Wykażemy najpierw, że $a=b$.

Z danej w treści zadania równości wynika, że

$$a(3+2\sqrt{2})+b(3-2\sqrt{2})+c=199,$$

czyli równoważnie

$$2(a-b)\sqrt{2}=199-c-3(a+b).$$

Jeżeli $a\neq b$, to dzieląc przez $2(a-b)$ obie strony powyższej zależności, otrzymujemy

$$\sqrt{2}=\frac{199-c-3(a+b)}{2(a-b)}.$$

Lewa strona ostatniej równości jest liczbą niewymierną, a prawa — wymierną. Uzyskaliśmy sprzeczność, która prowadzi do wniosku, że $a=b$.

Wykażemy teraz, że $c$ jest liczbą parzystą.

Narysujmy 99-kąt foremny $X_1X_2\ldots X_{99}$. Przy wierzchołku $X_1$ napiszmy liczbę $x_1$, przy wierzchołku $X_2$ — liczbę $x_2$, itd. Przy każdym jego wierzchołku napisaliśmy zatem jedną z dwóch liczb: $\sqrt{2}+1$ lub $\sqrt{2}-1$.

Wykonajmy teraz wędrówkę po obwodzie 99-kąta, zaczynając od wierzchołka $X_1$, odwiedzając kolejno wierzchołki $X_2, X_3, \ldots, X_{99}$ i kończąc w punkcie wyjścia $X_1$. Przechodząc z danego wierzchołka do kolejnego, odnotujmy czy liczba przy odwiedzanym wierzchołku uległa zmianie, tzn. czy liczby przy obu wierzchołkach są różne. Ponieważ wędrówka zaczyna się i kończy w tym samym punkcie $X_1$, więc podczas niej odnotujemy parzystą liczbę zmian.

Z drugiej strony, przy przejściu z danego wierzchołka do kolejnego liczba przy odwiedzanym wierzchołku ulega zmianie jedynie wtedy, gdy iloczyn obu liczb przypisanych tym wierzchołkom jest równy 1. Wobec tego liczba zmian odnotowanych podczas wędrówki jest równa $c$. To dowodzi, że $c$ jest liczbą parzystą.

Wykorzystując wyżej uzyskane zależności $a+b+c=99$ oraz $a=b$, wnioskujemy, że $c=99-2a$. To dowodzi, że $c$ jest liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy więc sprzeczność, z której wynika, że liczby o postulowanej własności nie istnieją.

---

**5.** Czy istnieje taki wielościan wypukły, że każdy kąt wewnętrzny jego każdej ściany jest prosty lub rozwarty i który ma dokładnie 100 krawędzi? Odpowiedź uzasadnij.

*Szkic rozwiązania*

Udowodnimy, że wielościan o opisanej własności nie istnieje.

Zauważmy, że jeżeli pewien wielościan wypukły ma wszystkie ściany o wszystkich kątach prostych lub rozwartych, to w każdym z jego wierzchołków schodzą się dokładnie trzy krawędzie. Rzeczywiście, rozważmy dowolny wierzchołek takiego wielościanu i oznaczmy przez $d\geqslant 3$ liczbę schodzących się w nim krawędzi. Wówczas suma $s$ miar kątów płaskich przy tym wierzchołku jest nie mniejsza od $d\cdot 90^\circ$. Z drugiej strony, w każdym wielościanie wypukłym suma kątów płaskich przy dowolnym wierzchołku jest mniejsza od $360^\circ$. Wobec tego

$$d\cdot 90^\circ \leqslant s < 360^\circ,$$

skąd wynika, że $d<4$, czyli $d=3$.

Przypuśćmy, że istnieje wielościan wypukły o 100 krawędziach, w którego każdym wierzchołku schodzą się dokładnie trzy krawędzie. Niech $w$ będzie liczbą wierzchołków tego wielościanu. Wówczas, skoro każdy wierzchołek jest końcem dokładnie trzech krawędzi wielościanu, a każda krawędź ma dwa końce, to

$$3w=2\cdot 100.$$

Ponieważ nie istnieje liczba całkowita $w$, która spełnia powyższą równość, więc nie istnieje wielościan o własności opisanej w treści zadania.