Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

XIII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (13 stycznia 2018 r.)

Szkice rozwiązań zadań konkursowych

---

1. Czy istnieją dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x o tej własności, że
$$a^2+b^2=c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2\,?$$
Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że takie liczby nie istnieją.

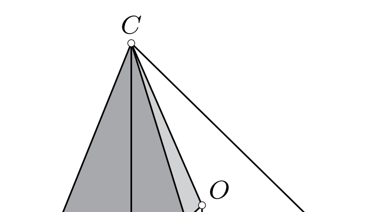
Przypuśćmy, że pewne dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c, x spełniają dane równości. Drugą z nich możemy przepisać w postaci
$$a^2+2ax+x^2+b^2+2bx+x^2=c^2+2cx+x^2\,.$$
Po skorzystaniu z pierwszej zależności $a^2+b^2=c^2$, redukując wyrazy podobne, otrzymujemy
$$x^2=2cx-2ax-2bx.$$
Ponieważ $x\neq 0$, więc $x=2(c-a-b)$. Jednak liczby a, b są dodatnie, wobec czego
$$c^2=a^2+b^2<a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\,.$$
Stąd $c<a+b$ i w konsekwencji $c-a-b<0$, co przeczy założeniu, że $x>0$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją liczby o postulowanej własności.

---

2. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC\neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

Szkic rozwiązania

Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AC<BC$. Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 1).



rys. 1

Ponieważ proste CK i OM są równoległe, więc
$$[CKO]=[CKM],$$
gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Czworokąt $AKOC$ jest wypukły, wobec czego otrzymujemy
$$[AKOC]=[AKC]+[CKO]=[AKC]+[CKM]=[ACM]=\tfrac{1}{2}[ABC].$$
W konsekwencji $[BKOC]=[ABC]-[AKOC]=\frac{1}{2}[ABC]$, czyli $[AKOC]=[BKOC]$, co było do udowodnienia.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

3. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x-yz=1 \\ xz+y=2\,. \end{cases}$$

Szkic rozwiązania

Sposób I

Dane równania podnosimy stronami do kwadratu, po czym dodajemy je stronami. Uzyskujemy wówczas $(x-yz)^2+(xz+y)^2=5$. Przekształcając lewą stronę tej zależności, dostajemy kolejno

$$x^2-2xyz+y^2z^2+x^2z^2+2xyz+y^2=5\,,$$
$$(x^2+y^2)(1+z^2)=5\,.$$

Liczba 5 posiada jedno przedstawienie w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych nieujemnych, mianowicie $1\cdot 5$. Wobec tego

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 1+z^2=1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1+z^2=5. \end{cases}$$

Przeanalizujmy najpierw pierwszy z uzyskanych układów równań. Wynika z niego natychmiast, że $z=0$. Podstawiając tę wartość do wyjściowego układu, otrzymujemy $x=1$ oraz $y=2$. Trójka $(x,y,z)=(1,2,0)$ jest więc rozwiązaniem wyjściowego układu równań.

Przejdziemy teraz do drugiego z otrzymanych wyżej układów.

Z drugiej równości uzyskujemy $|z|=2$, gdy tymczasem z pierwszej wnioskujemy, że jedna z liczb $|x|$, $|y|$ jest równa 0, a druga 1. Gdyby $|x|=0$, to z pierwszego równania danego w treści zadania układu uzyskalibyśmy $yz=-1$. Wtedy jednak $|yz|=1$, czyli $|y|=\frac{1}{2}$, co przeczy założeniu, że liczba y jest całkowita. Jeśli z kolei $|y|=0$, to $y=0$ i podstawiając tę wartość do danego w treści zadania układu równań, otrzymujemy $x=1$ oraz $z=2$. Bez trudu stwierdzamy, że trójka $(x,y,z)=(1,0,2)$ istotnie spełnia dany w treści zadania układ równań.

Ostatecznie dany układ ma dwa rozwiązania w liczbach całkowitych: $(x,y,z)=(1,2,0)$ lub $(x,y,z)=(1,0,2)$.

Sposób II

Z pierwszego równania danego układu uzyskujemy $x=1+yz$. Podstawiając tę równość do drugiego równania, otrzymujemy

$$(1+yz)z+y=2, \quad \text{czyli} \quad y(z^2+1)=2-z.$$

Wobec tego liczba z^2+1 jest dzielnikiem liczby $2-z$, a więc jest ona także dzielnikiem liczby

$$(2-z)(2+z)+(z^2+1)=4-z^2+z^2+1=5.$$

Stąd otrzymujemy $z^2+1=1$ lub $z^2+1=5$. W pierwszym przypadku $z=0$ i w konsekwencji $x=1$ oraz $y=2$. W drugim przypadku $|z|=2$. Jeżeli $z=-2$, to $z^2+1=5$ nie jest dzielnikiem liczby $2-z=4$. Jeżeli zaś $z=2$, to z równości $y(z^2+1)=2-z$ otrzymujemy $y=0$, skąd i z pierwszej równości danego układu mamy $x=1$.

Ostatecznie uzyskaliśmy, że $(x,y,z)=(1,2,0)$ lub $(x,y,z)=(1,0,2)$. Bezpośrednio sprawdzamy, że obie trójki istotnie spełniają wyjściowy układ równań.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym $\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC$. Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $\sphericalangle CPD = 180^\circ - \sphericalangle APD = 180^\circ - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$ oraz punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej CD. Stąd wynika, że punkty C, D, P, Q leżą na jednym okręgu.

Jeżeli punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży wewnątrz tego okręgu (rys. 2), to możemy napisać kolejno równości

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = \sphericalangle QPC = 180^\circ - \sphericalangle APQ\,.$$

Stąd wynika, że na czworokącie $ABQP$ można opisać okrąg.

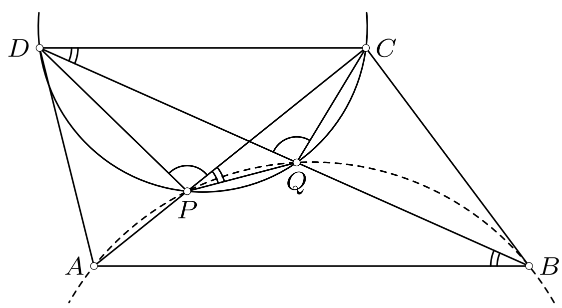
Jeżeli natomiast punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży na zewnątrz okręgu przechodzącego przez punkty C, D, P, Q (rys. 3), to punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AQ i spełnione są równości

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = 180^\circ - \sphericalangle QPC = \sphericalangle APQ,$$

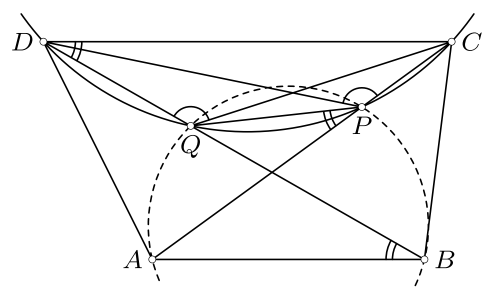
Wówczas na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg.

W obu przypadkach otrzymujemy równość $\sphericalangle AQB = \sphericalangle APB$, z której wynika, że

$$\sphericalangle AQD = 180^\circ - \sphericalangle AQB = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC.$$



rys. 2



rys. 3

---

5. Każdą liczbę całkowitą pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

Szkic rozwiązania

Przypuśćmy wbrew tezie, że każde dwie różne liczby, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej są różnego koloru.

Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą. Wówczas liczba $n+25$ jest innego koloru niż liczba n, gdyż $(n+25)-n=5^2$.

Zauważmy, że liczba $n+9$ jest innego koloru niż każda z liczb n oraz $n+25$, gdyż

$$(n+9)-n=3^2 \quad \text{oraz} \quad (n+25)-(n+9)=4^2\,.$$

Również liczba $n+16$ jest innego koloru niż każda z liczb n oraz $n+25$, gdyż

$$(n+16)-n=4^2 \quad \text{oraz} \quad (n+25)-(n+16)=3^2.$$

Wobec tego, skoro użyto jedynie trzech kolorów, to liczby $n+9$ i $n+16$ mają ten sam kolor.

Konkluzja ta jest słuszna dla *każdej* liczby całkowitej n. To oznacza, że każde dwie liczby różniące się o 7 są tego samego koloru. W konsekwencji również każde dwie liczby różniące się o $7\cdot 7 = 7^2$ są tego samego koloru. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że istnieją dwie różne liczby tego samego koloru, których różnica jest kwadratem liczby całkowitej.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku