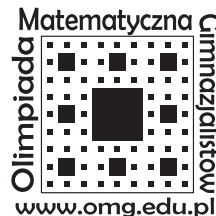


II Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zawody drużynowe
(środa, 15 maja 2013 r.)



1. Rozhodnite, či existuje nekonečné veľa prvočísel p , ktoré majú násobok v tvare $n^2 + n + 1$ pre nejaké prirodzené číslo n .

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

2. Nájďte všetky prirodzené čísla n také, že súčet troch najväčších deliteľov čísla n je 1457.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polském jazyce.

3. W pewnej grupie jest $n \geq 5$ osób, przy czym każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego oraz żadna osoba nie zna wszystkich pozostałych. Udowodnij, że można 5 spośród danych n osób usadzić przy okrągłym stole tak, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi

- (a) znajomymi,
- (b) nieznanymi.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenském jazyce.

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD > 90^\circ.$$

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina boki AD i CD odpowiednio w punktach K i L , różnych od wierzchołków czworokąta. Odcinki AL i CK przecinają się w punkcie P . Udowodnij, że $\sphericalangle ADB = \sphericalangle PDC$.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v češtine.

5. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, pro něž platí $ab + ac + bc \geq a + b + c$. Dokažte, že

$$a + b + c \geq 3.$$

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané v poľštine.

6. V rovině je dán čtverec $ABCD$, kde $|AB| = a$. Určete nejmenší možnou hodnotu poloměru tří shodných kruhů, pomocí nichž je možno pokrýt daný čtverec.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

(version: mixed)