

IV Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

Individual Competition
(Monday, 18 May 2015)

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC , w którym AC jest krótszą przyprostokątną oraz przeciwprostokątna AB ma długość 12. Punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC , a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C . Wyznacz miarę kąta wewnętrznego przy wierzchołku B , dla której trójkąt DTC ma największe możliwe pole.
2. Rozstrzygnij, czy wierzchołki 30-kąta foremnego można ponumerować liczbami $1, 2, \dots, 30$ w taki sposób, aby suma numerów każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem pewnej liczby naturalnej.
3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x^2 + y^2 \leq 2$. Wykaż, że

$$xy + 3 \geq 2x + 2y.$$

4. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C , a punkty E i F są środkami odpowiednio boków BC i AC . Dwusieczna kąta BAC przecina prostą EF w punkcie P . Udowodnij, że punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CDE .
5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$ o następującej własności: Dla każdej liczby $d > 1$ będącej dzielnikiem liczby n , liczba $d - 1$ jest dzielnikiem liczby $n - 1$.

(*version: Polish*)