Internetowe Koło Matematyczne
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Zestaw 1 — szkice rozwiązań zadań

1. W wierszu zapisano kolejno 2010 liczb. Pierwsza zapisana liczba jest równa 7 oraz suma każdych kolejnych siedmiu liczb jest równa 77. Ile może być równa ostatnia z zapisanych liczb?

Rozwiązanie

Ponumerujmy te liczby a_1, a_2, ..., a_{2010}. Zgodnie z warunkami zadania, otrzymujemy

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_6+a_7=77$$
$$a_2+a_3+a_4+\cdots+a_7+a_8=77.$$

Odejmując te równania stronami, dostajemy $a_1-a_8=0$, stąd $a_1=a_8=a_{1+7}$. Analogicznie

$$a_8+a_9+a_{10}+\cdots+a_{13}+a_{14}=77$$
$$a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{14}+a_{15}=77,$$

stąd $a_8-a_{15}=0$, więc $a_8=a_{15}=a_{1+2\cdot7}$.
W przypadku ogólnym

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{k+6}=77$$
$$a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}+\cdots+a_{k+7}=77.$$

Odejmując te równania stronami, dostajemy $a_k-a_{k+7}=0$, stąd $a_k=a_{k+7}$.
Zatem

$$a_1=a_{1+7}=a_{1+2\cdot7}=\ldots=a_{1+286\cdot7}=a_{1+287\cdot7}=7.$$

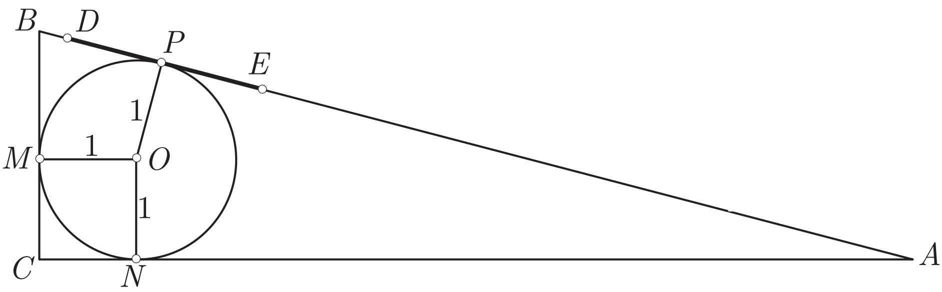
Ponieważ $1+287\cdot7=2010$, więc ostatnia z zapisanych liczb jest równa 7.

2. Na okręgu o promieniu 1 opisano trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Na przeciwprostokątnej AB tego trójkąta wybrano takie punkty D i E, że zachodzą równości $AD=AC$ i $BE=BC$. Oblicz długość odcinka DE.

Rozwiązanie

Niech punkty M, N, P będą punktami styczności okręgu z bokami trójkąta (zobacz rysunek).
Zauważmy, że czworokąt $OMCN$ ma trzy kąty proste, więc jest prostokątem. Ponadto $OM=ON=1$ zatem jest kwadratem, stąd $CM=CN=1$. Ponadto

$$AP=AN \quad \text{i} \quad BP=BM. \tag{1}$$



Ponieważ

$$AD = AP + DP \quad \text{oraz} \quad AC = AN + 1,$$

zatem na podstawie (1) oraz założenia $AD = AC$ otrzymujemy, że $DP = 1$.
Analogicznie

$$BE = BP + EP \quad \text{oraz} \quad BC = BM + 1,$$

stąd na podstawie (1) oraz założenia $BE = BC$, dostajemy $PE = 1$. Ostatecznie

$$DE = DP + PE = 1 + 1 = 2.$$

Uwaga. Równości $AP = AN$ i $BP = BM$, które stanowią treść twierdzenia o odcinkach stycznych do okręgu, można uzasadnić wykorzystując twierdzenie Pitagorasa:

$$AP^2 = AO^2 - OP^2 = AO^2 - ON^2 = AN^2,$$

stąd $AP = AN$. Analogicznie otrzymujemy, że $BP = BM$.

---

3. Wyznacz liczbę par (x, y) liczb całkowitych spełniających równanie

$$x^4 = y^4 + 1223334444.$$

Rozwiązanie

Dane równanie możemy zapisać równoważnie

$$x^4 - y^4 = 1223334444$$
$$(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 1223334444$$
$$(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = 1223334444.$$

Zauważmy, że jeżeli liczby x i y są różnej parzystości, to liczby $x - y$, $x + y$ są liczbami nieparzystymi. Liczba $x^2 + y^2$ też jest liczbą nieparzystą, bo kwadrat liczby parzystej jest liczbą parzystą, a kwadrat liczby nieparzystej jest liczbą nieparzystą. Lewa strona ostatniej równości jest w takim przypadku liczbą nieparzystą, a prawa jest liczbą parzystą. Jeżeli zatem dane równanie ma rozwiązanie w liczbach całkowitych, to liczby x i y muszą być tej samej parzystości.
Jeżeli liczby x i y są tej samej parzystości, to każda z liczb $x - y$, $x + y$ i $x^2 + y^2$ jest liczbą parzystą i stąd ich iloczyn jest liczbą podzielną przez 8. Jednocześnie liczba 1223334444 nie jest liczbą podzielną przez 8. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie ma par (x, y) liczb całkowitych spełniających dane równanie.

4. W pudełku znajduje się 11 kul białych i 11 kul niebieskich. Jaś i Małgosia grają w następującą grę, którą rozpoczyna Małgosia. Wyjmuje ona z tego pudełka wybrane przez siebie dwie kule. Jeżeli wybierze kule jednakowego koloru, to do pudełka dokłada jedną kulę białą; jeżeli wybierze kule różnych kolorów, to dokłada kulę niebieską. Następnie swój ruch, według tych samych zasad, wykonuje Jaś i znów Małgosia, znów Jaś itd., aż w końcu w pudełku zostanie tylko jedna kula. Jeżeli ta kula będzie biała, wygrywa Małgosia. W przeciwnym wypadku wygrywa Jaś. Czy Małgosia może tak prowadzić tę grę, aby wygrać? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Zauważmy, że po każdym ruchu liczba kul w pudełku zmniejsza się o 1 (gracz wybiera dwie kule a dokłada jedną). Ponadto nie zmienia się parzystość liczby kul niebieskich. Rzeczywiście, jeżeli gracz wybierze dwie kule białe, to dokłada zamiast nich kulę białą, czyli liczba kul niebieskich w pudełku nie zmienia się, a jeżeli gracz wybierze dwie kule niebieskie, to dokłada zamiast nich kulę białą, czyli liczba kul niebieskich w pudełku zmniejsza się o 2. I wreszcie, gdy gracz wybierze dwie kule różnych kolorów, to dokłada zamiast nich kulę niebieską, czyli liczba kul niebieskich w pudełku nie zmienia się.
Na początku gry w pudełu byą nieparzysta liczba kul niebieskich (11), zatem jeśli pozostanie w nim tylko jedna kula, musi ona być niebieska. Jak widać zawsze wygrywa Jaś.

Uwaga. Można to uzasadnić również inaczej. Oznaczmy każdą kulę białą liczbą $+1$, a każdą kulę niebieską liczbą -1. Zauważmy, że po wykonaniu każdego ruchu nie zmienia się iloczyn liczb przypisanych kulom znajdującym się w pudełku. Jeżeli bowiem wyjmujemy dwie kule białe lub dwie kule niebieskie, to iloczyn liczb na tych kulach jest równy $+1$, czyli liczbie przypisanej kuli białej. Zatem po wyjęciu dwóch kul jednakowego koloru i dodaniu kuli białej, iloczyn liczb przypisanych kulom znajdującym się w pudełku nie zmieni się. Analogicznie, jeżeli wybierzemy z pudełka dwie kule różnych kolorów i dołożymy kulę niebieską, to również iloczyn liczb na kulach znajdujących się w pudełku nie zmieni się. Oznacza to, że iloczyn liczb na kulach na początku gry jest równy liczbie na ostatniej kuli. Iloczyn jedenastu liczb $+1$ i jedenastu liczb -1 jest równy -1, czyli ostatnia kula w pudełku ma znak -1. Jest to zatem kula niebieska.

5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} a^2+24=9b+\dfrac{a+c}{2} \\ b^2+25=9c+\dfrac{b+a}{2} \\ c^2+26=9a+\dfrac{c+b}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dodając stronami równania danego układu, otrzymujemy

$$a^2+b^2+c^2+75=9a+9b+9c+a+b+c.$$

Po przeniesieniu wszystkich wyrazów na lewą stronę równania i skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia, dostajemy

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2-10a-10b-10c+75&=0 \\ a^2-10a+25+b^2-10b+25+c^2-10c+25&=0 \\ (a-5)^2+(b-5)^2+(c-5)^2&=0. \end{aligned}$$

Suma liczb nieujemnych jest równa zero wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych liczb jest równa zero, stąd

$$a=b=c=5.$$

Wykazaliśmy zatem, że jeśli dany układ ma rozwiązanie, to może nim być tylko trójka $(a,b,c)=(5,5,5)$. Jednak bezpośrednim podstawieniem stwierdzamy, że ta trójka nie spełnia równań pierwszego oraz trzeciego. Zatem dany układ nie ma rozwiązań.

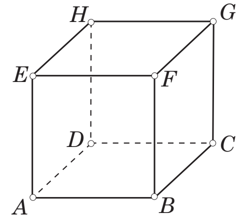
Uwaga. W rozwiązaniu zadania zastosowaliśmy metodę dodawania równań stronami. Musimy pamiętać, że w takim przypadku konieczne jest dokonanie sprawdzenia, czy otrzymane liczby spełniają dany układ. Podyktowane jest to tym, że dodawanie równań stronami nie jest przekształceniem równoważnym. Prawdą jest, że:

$$\text{jeżeli } a=b \text{ i } c=d, \text{ to } a+c=b+d.$$

Natomiast na ogół nie jest prawdą, że:

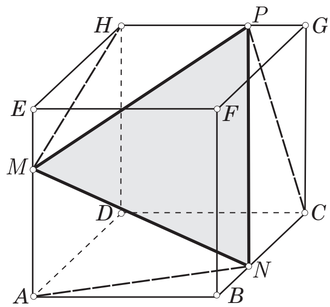
$$\text{jeżeli } a+c=b+d, \text{ to } a=b \text{ i } c=d.$$

6. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$. Na krawędziach AE, BC i GH tego sześcianu wybrano odpowiednio takie punkty M, N i P, że $AM = CN = HP$.
Wykaż, że trójkąt MNP jest trójkątem równobocznym.



Rozwiązanie

Jeżeli $AM = CN = HP$, to również $EM = BN = GP$. Zatem trójkąty prostokątne ABN, HEM i CGP są trójkątami przystającymi, więc $AN = CP = HM$.



Krawędź AE jest prostopadła do ściany $ABCD$, więc jest prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $ABCD$, stąd $AM \perp AN$. Analogicznie $CN \perp CP$ i $HP \perp HM$. Trójkąty AMN, CNP i HPM są więc trójkątami prostokątnymi oraz $AM = CN = HP$ i $AN = CP = HM$, zatem są trójkątami przystającymi, czyli

$$MN = NP = PM.$$

Oznacza to, że trójkąt MNP jest trójkątem równobocznym.

7. Powiemy, że liczba całkowita n jest liczbą *słoneczną*, jeżeli $n = a^2 + 5b^2$, gdzie liczby a i b są liczbami całkowitymi różnymi od zera. Wykaż, że jeżeli liczba n jest liczbą *słoneczną*, to liczba n^4 też jest liczbą *słoneczną*.

Rozwiązanie

Wykażemy na początku, że kwadrat liczby *słonecznej* jest liczbą *słoneczną*. Niech liczba n będzie liczbą *słoneczną*, czyli $n = a^2 + 5b^2$ dla pewnych liczb całkowitych a, b. Wtedy

$$\begin{aligned} n^2 &= (a^2 + 5b^2)^2 = a^4 + 10a^2b^2 + 25b^4 = \\ &= a^4 - 10a^2b^2 + 25b^4 + 20a^2b^2 = (a^2 - 5b^2)^2 + 5(2ab)^2 = \\ &= a_1^2 + 5b_1^2. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby a i b są liczbami całkowitymi, więc liczby $a_1 = a^2 - 5b^2$ i $b_1 = 2ab$ też są całkowite. Ponadto żadna z nich nie może być równa zero. Gdyby liczba a_1 była równa zero, to wtedy liczba $\sqrt{5}$ byłaby liczbą wymierną, co nie jest prawdą. Liczba b_1 jako iloczyn liczb różnych od zera też jest liczbą różną od zera. To kończy dowód, że kwadrat liczby *słonecznej* jest liczbą *słoneczną*.
Stąd $n^4 = (n^2)^2$ jako kwadrat liczby *słonecznej* jest liczbą *słoneczną*.

Uwaga. Można wykazać, że iloczyn dwóch, niekoniecznie równych, liczb *słonecznych* jest liczbą *słoneczną*. Pozostawiamy to jako ćwiczenie. (*tsz*)