



## Zestaw 5

1. Wykaż, że dla każdych liczb dodatnich  $a, b, c$  prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a^2 + b^2 + c^2} < a + b + c.$$

*Wskazówka*

Aby wykazać nierówność  $L < P$  wystarczy wykazać, że prawdziwa jest nierówność  $L - P < 0$ .

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze  $p$  takie, że  $p + 27$  jest sześcianem liczby naturalnej.

*Wskazówka*

W rozwiązaniu może być przydatny wzór  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

3. Dany jest równoległobok  $ABCD$ . Na bokach  $AB$  i  $AD$  wybrano odpowiednio takie punkty  $E$  i  $F$ , że odcinek  $EF$  jest równoległy do przekątnej  $BD$  danego równoległoboku. Wykaż, że pola trójkątów  $BCE$  i  $CDF$  są równe.

*Wskazówka*

Wykaż na początku, że pola trójkątów  $ACE$  i  $ACF$  są równe.

4. Liczby  $a, b, c, d$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Wykaż, że wśród liczb:

$$a + b - \sqrt{cd}, \quad b + c - \sqrt{da}, \quad c + d - \sqrt{ab}, \quad d + a - \sqrt{bc}$$

co najmniej dwie są dodatnie.

*Wskazówka*

Zauważ, że jeśli suma dwóch liczb jest dodatnia, to co najmniej jedna z tych liczb musi być dodatnia.



5. Każdy punkt płaszczyzny został pomalowany jednym z dwóch kolorów, przy czym istnieją na tej płaszczyźnie punkty różnych kolorów. Wykaż, że istnieją na tej płaszczyźnie dwa punkty różnych kolorów odległe o 10.

*Wskazówka*

Niech punkty  $A$  i  $B$  będą punktami różnych kolorów. Rozpatrz przypadki:  $1^\circ AB = 10$ ,  $2^\circ AB < 10$ ,  $3^\circ AB > 10$ . Zauważ, że badanie przypadku  $3^\circ$  można sprowadzić do badania przypadków:  $1^\circ$  i  $2^\circ$ .

6. Wyznacz wszystkie rozwiązania równania

$$3x\sqrt{x^2-9} + 4x\sqrt{x^2-16} + 5x\sqrt{x^2-25} = 120.$$

*Wskazówka*

Zbadaj, jakie wartości może przyjmować  $x$ , aby lewa strona danego równania była określona? Jaki stąd można wysnuć wniosek o wartościach lewej strony równania?

7. Na kuli o promieniu 1 opisano wielościan, którego pole powierzchni jest równe 12. Oblicz objętość tego wielościanu.

*Wskazówka*

Spróbuj najpierw rozwiązać analogiczne zadanie płaskie: *na kole o promieniu 1 opisano wielokąt o obwodzie 6. Oblicz pole tego wielokąta. Czy zauważasz analogię? Zwróć uwagę na warunki rozwiązalności zadania!*



KAPITAŁ LUDZKI  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

MINISTERSTWO  
EDUKACJI  
NARODOWEJ

UNIA EUROPEJSKA  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

