Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Kwadrat

Gazetka Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Nr 18
sierpień 2016
ISSN 2300-0708

Henryk Pawłowski (1960-2016)

W dniu 11 czerwca 2016 r. nagle i niespodziewanie odszedł od nas Henryk Pawłowski, współtwórca Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, przewodniczący Komitetu Okręgowego OMG w Toruniu (od początku istnienia Olimpiady), nauczyciel wielu olimpijczyków, autor znakomitych zbiorów zadań oraz podręczników, wielki pasjonat matematyki.

Henryk Pawłowski, nauczyciel IV LO, a także Gimnazjum i Liceum Akademickiego w Toruniu, był osobą o niezwykłej charyzmie. Swoją pasją do zadań olimpijskich zaraził wielu uczniów, a organizacja zawodów matematycznych była dla niego jednym z ważniejszych aspektów w edukacji matematycznej. Wraz z Wojciechem Tomalczykiem, nauczycielem III LO i przewodniczącym Komitetu Okręgowego OMG w Gdyni, był inicjatorem i organizatorem tzw. *małej Olimpiady Matematycznej* (mOM), która po kilku latach przebudowy została wznowiona pod nazwą *Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów*.

Można śmiało zaryzykować tezę, że gdyby nie mOM, to nasza Olimpiada by nigdy nie powstała, a bez Henryka Pawłowskiego nie będzie już tym, czym była.

Różnica kwadratów

Wzór skróconego mnożenia

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

jest niezwykle prosty — aby go wyprowadzić, wystarczy wymnożyć nawiasy:

$$(a-b)(a+b)=(a-b)\cdot a+(a-b)\cdot b=$$
$$=a^2-ba+ab-b^2=a^2-b^2\,.$$

Tożsamość ta jest bardzo użyteczna w różnych sytuacjach, pozwala m.in. wykonywać w pamięci niektóre działania na dość dużych liczbach. Na przykład, żeby pomnożyć 998 przez 1002, wystarczy zauważyć, że $998=1000-2$ oraz $1002=1000+2$, aby natychmiast podać odpowiedź:

$$998\cdot 1002=1000^2-2^2=999\,996\,.$$

Oto inny przykład działania, które można szybko wykonać w pamięci: $27^2-23^2=(27-23)\cdot(27+23)=4\cdot 50=200$.

Wzór na różnicę kwadratów przydaje się często w zadaniach olimpijskich, co chcielibyśmy zaprezentować w niniejszym artykule.

Zadanie 1.

Oblicz $100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2$.

Rozwiązanie

Pogrupujmy składniki po dwa i użyjmy wzoru na różnicę kwadratów:

$$100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2=$$
$$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+\ldots$$
$$\ldots+(2-1)(2+1)=$$
$$=100+99+98+97+\ldots+2+1=\tfrac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=5050.$$

Pod koniec korzystamy ze wzoru na sumę kolejnych liczb naturalnych, opisanego np. w *Kwadracie* nr 11.

Zadanie 2.

Czy istnieją takie dwie dodatnie liczby całkowite, których różnica wynosi 2 i których iloczyn jest kwadratem liczby całkowitej?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez $n-1$ oraz $n+1$ pewne dodatnie liczby całkowite różniące się o 2. Wówczas

$$(n-1)^2<(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2\,,$$

czyli iloczyn rozważanych liczb jest większy od kwadratu liczby $n-1$, ale mniejszy od kwadratu kolejnej liczby naturalnej n. Nie może więc być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (VI OMG, zawody II stopnia)

Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wykaż, że jeżeli liczba a^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$, to także liczba b^2 jest podzielna przez liczbę $a+b$.

Rozwiązanie

Wiemy, że $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, czyli liczba a^2-b^2 jest podzielna przez $a+b$. Ponadto z założenia liczba a^2 jest podzielna przez $a+b$. Wobec tego również różnica $a^2-(a^2-b^2)=b^2$ jest podzielna przez $a+b$.

W wielu zadaniach rozłożenie pewnego wyrażenia na czynniki jest kluczowym krokiem rozumowania. Jest to szczególnie przydatne, gdy badany iloczyn jest równy zero, jak również w zagadnieniach związanych z liczbami całkowitymi i podzielnością, a zwłaszcza z liczbami pierwszymi.

Zadanie 4.

Czy istnieje liczba pierwsza postaci 999...91, gdzie cyfra 9 występuje nieparzystą liczbę razy?

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba dziewiątek użytych do zapisu danej liczby wynosi $2n-1$. Wówczas

$$999...91=10^{2n}-9=(10^n)^2-3^2=(10^n-3)(10^n+3)\,.$$

Żaden z uzyskanych czynników nie jest równy 1, a zatem wyjściowa liczba nie jest pierwsza.

Uwaga

Jeśli liczba dziewiątek w zapisie 999...91 jest parzysta, to liczba tej postaci może być zarówno pierwsza, jak i złożona. Na przykład liczby 991, 99 991, 9 999 991

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja
Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

są pierwsze, natomiast liczba 999 999 991 jest złożona (dzieli się przez 67).

Zadanie 5. (V OMG, zawody I stopnia)

Wyznacz wszystkie trójki liczb pierwszych a, b, c, dla których $a^2 = b^2 + c$.

Rozwiązanie

Dane w treści zadania równanie możemy przepisać w postaci $c = (a-b)(a+b)$. Skoro wiemy, że liczby c oraz $a+b$ są dodatnie, to liczba $a-b$ również jest dodatnia. Liczba c jest ponadto pierwsza, zatem mniejszy z dodatnich czynników $a-b$, $a+b$ jest równy 1. Stąd $a-b=1$. Skoro liczby a, b są pierwsze i różnią się o 1, to $a=3$, $b=2$. Wówczas $c = 1\cdot(3+2) = 5$ także jest liczbą pierwszą, więc istnieje jedno rozwiązanie: $a=3$, $b=2$, $c=5$.

Zadanie 6.

Rozstrzygnij, czy istnieją nieujemne liczby całkowite a, b, n, dla których $a^2 - b^2 = 2\cdot 3^n$.

Rozwiązanie

Zapiszmy daną w treści zadania równość w postaci $(a-b)(a+b) = 2\cdot 3^n$. Liczba po prawej stronie jest parzysta, ale niepodzielna przez 4. Stąd jeden z czynników po lewej stronie jest parzysty, a drugi nieparzysty. Wobec tego ich suma $(a-b)+(a+b) = 2a$ jest nieparzysta. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że liczby opisane w treści zadania nie istnieją.

Zadanie 7.

Udowodnij, że dla każdej liczby pierwszej p większej od 3 liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.

Rozwiązanie

Ponieważ największy wspólny dzielnik liczb 8 i 3 jest równy 1, więc wystarczy dowieść, że rozważana liczba dzieli się przez 8 i przez 3.

Liczba $p>3$ jest pierwsza, a zatem nieparzysta. Wobec tego w iloczynie $p^2-1 = (p-1)(p+1)$ występują dwie kolejne liczby parzyste, a więc jedna z nich dzieli się przez 4. Stąd liczba p^2-1 jest podzielna przez 8.

Ponadto spośród trzech kolejnych liczb $p-1$, p, $p+1$ dokładnie jedna dzieli się przez 3 i z treści zadania wynika, że nie jest to liczba p. Zatem jeden z czynników iloczynu $(p-1)(p+1)$ jest podzielny przez 3, co kończy rozwiązanie zadania.

W kolejnym rozwiązaniu wykorzystamy wzór na kwadrat różnicy:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Podobnie jak w przypadku wzoru na różnicę kwadratów, tożsamość tę można natychmiast udowodnić, wymnażając nawiasy po lewej stronie.

Zadanie 8. (VI OMG, zawody I stopnia)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2 \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}$$

Rozwiązanie

Odejmując równania stronami i przekształcając, uzyskujemy kolejno:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 4x + 4y &= 0 \\ (x-y)(x+y) - 4(x-y) &= 0 \\ (x-y)(x+y-4) &= 0. \end{aligned}$$

Iloczyn dwóch liczb jest równy 0 wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jedna z nich jest równa 0.

Jeśli $x-y=0$, to $x=y$ i po podstawieniu do pierwszego z wyjściowych równań i przekształceniach otrzymujemy $2x^2 - 4x = -2$. Dzieląc stronami przez 2 i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy, uzyskujemy $(x-1)^2 = 0$, czyli $x=1$. Stąd wniosek, że $x=y=1$.

Jeżeli zaś $x+y-4=0$, to $y-4=-x$ i po podstawieniu do pierwszego z wyjściowych równań i przekształceniach otrzymujemy $x^2 + x(-x) = -2$, czyli sprzeczność: $0=-2$. Oznacza to, że w tym przypadku rozwiązań nie ma i jedynym rozwiązaniem jest uzyskana wcześniej para $(x,y) = (1,1)$.

Wzór na różnicę kwadratów bywa przydatny także w sytuacjach, w których mamy do czynienia z różnicą wyższych parzystych potęg.

Zadanie 9.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniających równanie $x^4 - y^4 = 65$.

Rozwiązanie

Przekształćmy:

$$x^4 - y^4 = (x^2-y^2)(x^2+y^2) = (x-y)(x+y)(x^2+y^2).$$

Ponieważ liczby x, y oraz wartość powyższego wyrażenia są dodatnie, więc $x-y>0$. Wszystkie trzy powyższe czynniki są więc dodatnie.

Zauważmy teraz, że $65 = 5\cdot 13$ i obydwa czynniki 5 oraz 13 są liczbami pierwszymi. Zatem liczbę 65 można przedstawić jako iloczyn *trzech* dodatnich czynników tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z nich jest równy 1.

Liczby x, y są całkowite i dodatnie, więc

$$x^2 + y^2 \geqslant x + y > 1.$$

Wobec tego $x-y=1$, $x+y=5$ oraz $x^2+y^2=13$. Z pierwszych dwóch równości wynika, że $x=3$ i $y=2$. Wartości te spełniają też trzecie równanie, więc para $(3,2)$ jest jedynym rozwiązaniem.

Zadanie 10. (Koło Matematyczne SEM, seria 1)

Wyznacz liczbę par (x,y) liczb całkowitych spełniających równanie $x^4 = y^4 + 1223334444$.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, przekształćmy dane równanie do postaci

$$(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 1223334444.$$

Liczba po prawej stronie jest parzysta, więc przynajmniej jeden z czynników po lewej stronie również jest parzysty. Wobec tego liczby x, y są tej samej parzystości, tzn. obie są parzyste lub obie są nieparzyste. Ale wówczas wszystkie trzy czynniki po lewej stronie są parzyste, a więc ich iloczyn dzieli się przez 8. Tymczasem liczba 1223334444 nie jest podzielna przez 8. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie istnieją pary (x,y) spełniające dane równanie.

W rozwiązaniu poniższego zadania skorzystamy dodatkowo ze wzoru na sumę trzecich potęg, który również można łatwo sprawdzić, wymnażając nawiasy:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Zadanie 11. (zawody *Náboj*, 2016 r.)

Znajdź jedyny trzycyfrowy dzielnik pierwszy liczby 999 999 995 904.

Rozwiązanie

Zacznijmy od obserwacji, że

$$999\,999\,995\,904 = 10^{12} - 4096 = 10^{12} - 2^{12} = 2^{12}\cdot(5^{12}-1),$$

z której wynika, że szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy danej liczby jest także dzielnikiem liczby $5^{12}-1$.

Wykorzystując dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów, uzyskujemy

$$5^{12}-1 = (5^6-1)(5^6+1) = (5^3-1)(5^3+1)(5^6+1) =$$
$$= 124\cdot 126\cdot(5^6+1) = (2\cdot 62)\cdot(2\cdot 63)\cdot(5^6+1)\,.$$

Stąd — podobnie jak wyżej — wnioskujemy, że szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy wyjściowej liczby jest dzielnikiem liczby 5^6+1.

Dalej zauważmy, że zgodnie z powyższym wzorem na sumę trzecich potęg,

$$5^6+1 = (5^2)^3+1 = (5^2+1)(5^4-5^2+1) = 26\cdot 601\,.$$

Szukany trzycyfrowy dzielnik pierwszy p jest więc dzielnikiem liczby 601. Wówczas $601 = p\cdot q$, przy czym $q<7$ (bo $p\geqslant 100$) i jednocześnie q także jest dzielnikiem liczby 601.

Ponieważ 601 nie dzieli się przez żadną z liczb 2, 3, 4, 5 ani 6, więc jedyną możliwością pozostaje $q=1$. Stąd $p=601$ i liczba ta jest szukanym trzycyfrowym dzielnikiem pierwszym.

Na koniec proponujemy zadania do samodzielnego rozwiązania. Wskazówki do nich podamy w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 12.

Oblicz

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\,.$$

Zadanie 13. (IV OMG, zawody II stopnia)

Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb nieparzystych dodatnich spełniające zależność

$$\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}\,.$$

Zadanie 14. (Koło Matematyczne SEM, seria 8)

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n, które spełniają nierówności

$$\frac{2010}{\sqrt{n+10}} < \sqrt{n-10} < \frac{2011}{\sqrt{n+10}}.$$

Zadanie 15.

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (x,y) spełniających równanie $x^8-y^8=6305$.

Zadanie 16.

Czy istnieją takie liczby całkowite x, y, że liczba x^4-y^4 kończy się cyframi 1000?

Joanna Jaszuńska

Kolejna inspiracja

W *Kwadracie* nr 9 opublikowaliśmy tekst Michała Miśkiewicza, w którym opisał on swoją pracę „Urok zbioru μ", nagrodzoną m.in. brązowym medalem na 23. Konkursie Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej (European Union Contest for Young Scientists, EUCYS). Praca powstała, gdy Michał był uczniem liceum, a inspiracją dla niego było zadanie z IV OMG (2008/2009). W dopisku do tego artykułu napisaliśmy, że czekamy na osoby, które pójdą w jego ślady.

Jest nam niezmiernie miło poinformować, że doczekaliśmy się! Inspirując się innym zadaniem z naszej Olimpiady, Jadwiga Czyżewska z Gimnazjum nr 13 im. Stanisława Staszica w Warszawie napisała pracę „Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów". Praca została nagrodzona brązowym medalem na XXXVII Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki czasopisma *Delta*. Zdobyła również pierwszą nagrodę w tegorocznej polskiej edycji 28. Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej (EUCYS 2016) i będzie walczyć o nagrodę w międzynarodowej edycji tego konkursu w połowie września 2016 r. w Brukseli.

Jadwidze gratulujemy i mocno trzymamy kciuki, a Czytelnikom życzymy miłej lektury artykułu, w którym uchyla ona rąbka swoich matematycznych badań.

Chodź, pomaluj mi płaszczyznę!

W 2013 roku na II etapie VIII Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów pojawiło się następujące zadanie:

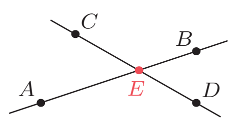
Zadanie 1.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każda prosta była jednokolorowa lub dwukolorowa. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Można użyć co najwyżej trzech kolorów.

Załóżmy najpierw, że płaszczyzna została pokolorowana co najmniej czterema kolorami. Wybierzmy cztery różnokolorowe punkty A, B, C, D (rys. 1). Bez straty ogólności możemy przyjąć, że proste AB i CD się przecinają; ich wspólny punkt oznaczmy jako E. Jeżeli punkt E ma taki sam kolor jak punkt A lub B, to prosta CD jest co najmniej trzykolorowa. Jeżeli zaś kolor punktu E jest różny od kolorów punktów A i B, to z kolei prosta AB jest co najmniej trzykolorowa. Zatem nie da się pokolorować płaszczyzny czterema (lub więcej) kolorami w taki sposób, aby każda prosta była co najwyżej dwukolorowa.



rys. 1

rys. 2

Wskażemy teraz kolorowanie płaszczyzny trzema kolorami, spełniające warunki zadania. Pokolorujmy najpierw całą płaszczyznę na jeden kolor, np. biały (rys. 2). Wybierzmy prostą ℓ i pokolorujmy ją na inny kolor, np. czarny. Na prostej ℓ wybierzmy punkt A i pokolorujmy go na trzeci kolor, np. czerwony. Wtedy każda prosta jest co najwyżej dwukolorowa, co kończy rozwiązanie zadania.

Powyższe zadanie stanowi doskonałą bazę do zadawania pokrewnych pytań. W *Kwadracie* nr 12 w artykule „Zadaniowe laboratorium" Adam Dzedzej stawia między innymi takie pytanie: *Iloma maksymalnie kolorami można pokolorować płaszczyznę, aby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa?* Okazuje się, że zwiększenie zaledwie do trzech liczby kolorów na prostej pozwala użyć już dowolnie wielu kolorów na płaszczyźnie — dowód był prezentowany w zacytowanym artykule.

Oprócz zmiany liczby kolorów w wyjściowym problemie, można zastąpić prostą innym obiektem. Drugim (po prostej) bohaterem zadań geometrycznych jest oczywiście okrąg. Czytelnikowi pozostawiam do rozwiązania następujące odpowiedniki wcześniej zaprezentowanych problemów, w których prosta została zamieniona na okrąg. Wskazówki do nich znajdą się w następnym numerze *Kwadratu*.

Zadanie 2.

Każdy punkt płaszczyzny należy pomalować na pewien kolor w taki sposób, aby każdy okrąg był jednokolorowy lub dwukolorowy. Jaka jest największa możliwa liczba kolorów, których można użyć do pomalowania punktów tej płaszczyzny?

Zadanie 3.

Każdy punkt płaszczyzny należy pokolorować tak, aby każdy okrąg był co najwyżej trzykolorowy. Ilu maksymalnie kolorów można użyć do pokolorowania punktów tej płaszczyzny?

W pracy „Kolorowanie płaszczyzny, prostych i okręgów”, którą napisałam na Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki organizowany przez czasopismo *Delta*, zadałam ogólniejsze pytanie: *na ile maksymalnie kolorów można pokolorować płaszczyznę w taki sposób, by każda prosta była co najwyżej m-kolorowa, natomiast każdy okrąg był co najwyżej n-kolorowy?*

Udało mi się znaleźć odpowiedź dla prawie wszystkich wartości m i n. Otwarte pozostaje tylko pytanie dla $m = n = 3$, czyli o maksymalną liczbę kolorów pozwalającą pomalować płaszczyznę tak, aby każda prosta i każdy okrąg były co najwyżej trzykolorowe. Umiem jednak wykazać, że w tym przypadku maksymalna liczba kolorów jest równa 4 lub 5.

Twierdzenie

Niech k będzie maksymalną liczbą kolorów, których można użyć do pokolorowania punktów płaszczyzny w taki sposób, aby każda prosta była co najwyżej trzykolorowa i każdy okrąg był co najwyżej trzykolorowy. Wówczas $k = 4$ lub $k = 5$.

Dowód

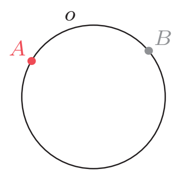
Wykażemy, że $k \geqslant 4$, czyli że istnieje kolorowanie punktów płaszczyzny czterema kolorami takie, że każda prosta i każdy okrąg są co najwyżej trzykolorowe.

Pokolorujmy całą płaszczyznę na jeden kolor, np. biały. Wybierzmy okrąg o i pokolorujmy go na inny kolor, np. czarny (rys. 3). Na okręgu o wybierzmy dwa punkty A, B i pokolorujmy je na dwa inne kolory, np. czerwony i szary.

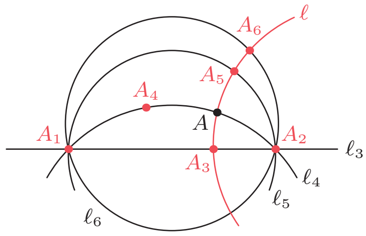
Zauważmy, że jeżeli prosta nie ma punktów wspólnych z okręgiem o, to jest jednokolorowa, gdy jest do niego styczna, to jest dwukolorowa, a jeżeli go przecina, to jest dwu- lub trzykolorowa. Analogicznie jest dla okręgów. Zatem $k \geqslant 4$.

Wykażemy teraz, że nie istnieje kolorowanie płaszczyzny 6 kolorami, przy którym każda prosta i każdy okrąg są najwyżej trzykolorowe, czyli że $k < 6$.

Dowód przeprowadzimy nie wprost. Przypuśćmy, że takie kolorowanie istnieje i wybierzmy 6 różnokolorowych punktów: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 (rys. 4).



rys. 3



rys. 4

Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkty A_3, A_4, A_5, A_6 leżą po tej samej stronie prostej A_1A_2. Przez punkty A_1, A_2, A_i dla $i = 3, 4, 5, 6$ możemy poprowadzić dokładnie jedną prostą (gdy punkty A_1, A_2, A_i są współliniowe) lub dokładnie jeden okrąg (gdy punkty A_1, A_2, A_i nie są współliniowe).

Tę prostą lub okrąg oznaczmy przez ℓ_i ($i = 3, 4, 5, 6$). Zauważmy, że $\ell_i \neq \ell_j$ dla $i \neq j$, gdyż w przeciwnym razie punkty A_1, A_2, A_i, A_j leżałyby na jednej prostej lub jednym okręgu, a wtedy obiekt ten byłby co najmniej czterokolorowy, co przeczy założeniu.

Jeśli jednym z obiektów ℓ_i jest prosta, to przyjmijmy, że jest to ℓ_3, tzn. prosta ta zawiera punkty A_1, A_2 i A_3. Bez straty ogólności możemy założyć, że punkt A_3 znajduje się wówczas pomiędzy punktami A_1 i A_2. Numerację okręgów ℓ_4, ℓ_5 i ℓ_6 ustalmy w ten sposób, aby $\sphericalangle A_1A_4A_2 > \sphericalangle A_1A_5A_2 > \sphericalangle A_1A_6A_2$.

Jeśli z kolei wśród obiektów ℓ_i dla $i = 3, 4, 5, 6$ nie ma prostej, to ustalmy ich numerację w taki sposób, aby $\sphericalangle A_1A_3A_2 > \sphericalangle A_1A_4A_2 > \sphericalangle A_1A_5A_2 > \sphericalangle A_1A_6A_2$.

Poprowadźmy teraz przez punkty A_3, A_5, A_6 okrąg lub prostą ℓ. Wówczas ℓ przecina okrąg ℓ_4 w pewnym punkcie A. Niezależnie od koloru punktu A, któryś z tych dwóch obiektów — ℓ lub ℓ_4 — musi być czterokolorowy. Uzyskana sprzeczność kończy drugą część dowodu przedstawionego twierdzenia.

Do pełnego rozwiązania zagadnienia pozostaje więc rozstrzygnąć, czy płaszczyznę można pokolorować pięcioma kolorami w taki sposób, aby każda prosta i każdy okrąg były co najwyżej trzykolorowe. Może Ty, drogi Czytelniku, potrafisz wskazać przykład takiego kolorowania lub umiesz uzasadnić, że ono nie istnieje?

Jadwiga Czyżewska

Wskazówki do zadań z poprzedniego numeru

O pożytku z pola

6. Zauważ, że jeśli P jest punktem leżącym wewnątrz trójkąta równobocznego ABC, to suma pól trójkątów ABP, BCP i CAP jest stała, niezależna od wyboru punktu P.

7. Zmodyfikuj odpowiednio rozwiązanie zadania 4.

8. Uzasadnij, że iloraz $PA' : AA'$ jest równy stosunkowi pól trójkątów PBC i ABC.

9. Zmodyfikuj odpowiednio rozwiązanie zadania 5.

Cyfrowe problemy

5. $k \equiv S(k) \pmod 9$.

6. Podziel daną liczbę przez odpowiednią potęgę liczby 100, a następnie zbadaj podzielność uzyskanej liczby przez 4 lub 25.

7. $N \equiv S(N) = S(1) + \ldots + S(600) \equiv 1 + \ldots + 600 \equiv 3 \pmod 9$.

„Kwadrat” redaguje zespół w składzie: Łukasz Bożyk, Tomasz Cieśla, Waldemar Pompe (red. nacz.), Łukasz Rajkowski, Tomasz Szymczyk.
Recenzent: dr Joanna Jaszuńska. Adres do korespondencji: kwadrat.omg@gmail.com Nakład: 2000 egz.