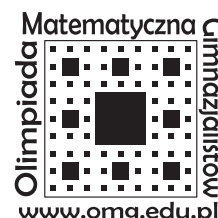


Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IV (październik 2012) — rozwiązania zadań



16. Dla danej liczby naturalnej n rozważamy wszystkie sumy postaci

$$1 \cdot a_1 \cdot b_1 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + 3 \cdot a_3 \cdot b_3 + 4 \cdot a_4 \cdot b_4 + \dots + n \cdot a_n \cdot b_n,$$

gdzie $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ są permutacjami ciągu $(1, 2, 3, \dots, n)$.

Udowodnij, że największa z tych sum jest kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie

Niech $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ oraz $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ będą permutacjami ciągu $(1, 2, 3, \dots, n)$, dla których dana w zadaniu suma jest największa.

Rozważmy następujące przypadki:

1° Istnieje takie i , że $1 \leq i < n$ oraz

$$a_i > a_{i+1}, \quad b_i > b_{i+1}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} i \cdot a_i \cdot b_i + (i+1) \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1} &= i \cdot (a_i \cdot b_i + a_{i+1} \cdot b_{i+1}) + a_{i+1} \cdot b_{i+1} < \\ < i \cdot (a_i \cdot b_i + a_{i+1} \cdot b_{i+1}) + a_i \cdot b_i &= i \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1} + (i+1) \cdot a_i \cdot b_i, \end{aligned}$$

co oznacza, że zamiana a_i z a_{i+1} oraz b_i z b_{i+1} prowadzi do sumy o większej wartości. Zatem permutacja realizująca największą wartość sumy nie może wystąpić w tym przypadku.

2° Istnieje takie i , że $1 \leq i < n$ oraz

$$a_i < a_{i+1}, \quad b_i > b_{i+1}.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} i \cdot a_i \cdot b_i + (i+1) \cdot a_{i+1} \cdot b_{i+1} &= i \cdot a_i \cdot (b_i + b_{i+1}) + ((i+1) \cdot a_{i+1} - i \cdot a_i) \cdot b_{i+1} < \\ < i \cdot a_i \cdot (b_i + b_{i+1}) + ((i+1) \cdot a_{i+1} - i \cdot a_i) \cdot b_i &= i \cdot a_i \cdot b_{i+1} + (i+1) \cdot a_{i+1} \cdot b_i, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że zamiana b_i z b_{i+1} prowadzi do sumy o większej wartości. Tak więc permutacja realizująca największą wartość sumy nie może wystąpić w tym przypadku.

3° Istnieje takie i , że $1 \leq i < n$ oraz

$$a_i > a_{i+1}, \quad b_i < b_{i+1}.$$

Ten przypadek jest analogiczny do przypadku 2° — wystarczy zamienić rolami a oraz b .

Największa suma jest więc otrzymywana w ostatnim przypadku:

4° Nie zachodzi żaden z powyższych przypadków, czyli dla każdego i spełniającego nierówność $1 \leq i < n$ zachodzi

$$a_i < a_{i+1} \quad \text{oraz} \quad b_i < b_{i+1}.$$

Oznacza to, że $a_j = j$ oraz $b_j = j$ dla $j = 1, 2, 3, \dots, n$.

Zatem największa możliwa wartość danej w zadaniu sumy jest równa

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3.$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Uwaga

Powyższe rozumowanie jest w istocie dowodem szczególnego przypadku twierdzenia o ciągach jednakowo monotonicznych. Można więc zastąpić je powołaniem się na to twierdzenie.

Wykażemy, że powyższa suma jest równa

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

Liczba w nawiasie jest całkowita, ponieważ jedna z liczb n , $n+1$ jest parzysta. W ten sposób zakończymy rozwiązanie zadania.

Zauważmy, że

$$\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2 = \frac{n^2 \cdot ((n+1)^2 - (n-1)^2)}{4} = \frac{n^2 \cdot (4n)}{4} = n^3.$$

Stąd

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 &= \left(\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 - \left(\frac{0 \cdot 1}{2}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2\right) + \\ &+ \left(\left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{4 \cdot 5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3 \cdot 4}{2}\right)^2\right) + \dots + \\ &+ \left(\left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-2) \cdot (n-1)}{2}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1) \cdot n}{2}\right)^2\right) = \\ &= \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{0 \cdot 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

czego należało dowieść.

17. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x , y , istnieje taka liczba całkowita dodatnia $n \leq 1000000$, że każda z liczb nx oraz ny ma w zapisie dziesiętnym na trzech pierwszych miejscach po przecinku same dziewiątki lub same zera.

Rozwiązanie

Każdej z liczb całkowitych dodatnich $n \leq 1000000$ przypiszmy parę liczb trzycyfrowych (dopuszczamy zera na początku zapisu liczby) utworzonych z trzech cyfr po przecinku występujących w liczbach nx oraz ny .

Ponieważ takich par jest 1000000, musi zajść co najmniej jeden z poniższych przypadków:

1° Pewnej liczbie n przypisaliliśmy parę (000, 000). Oznacza to, że każda z liczb nx oraz ny ma po przecinku trzy zera.

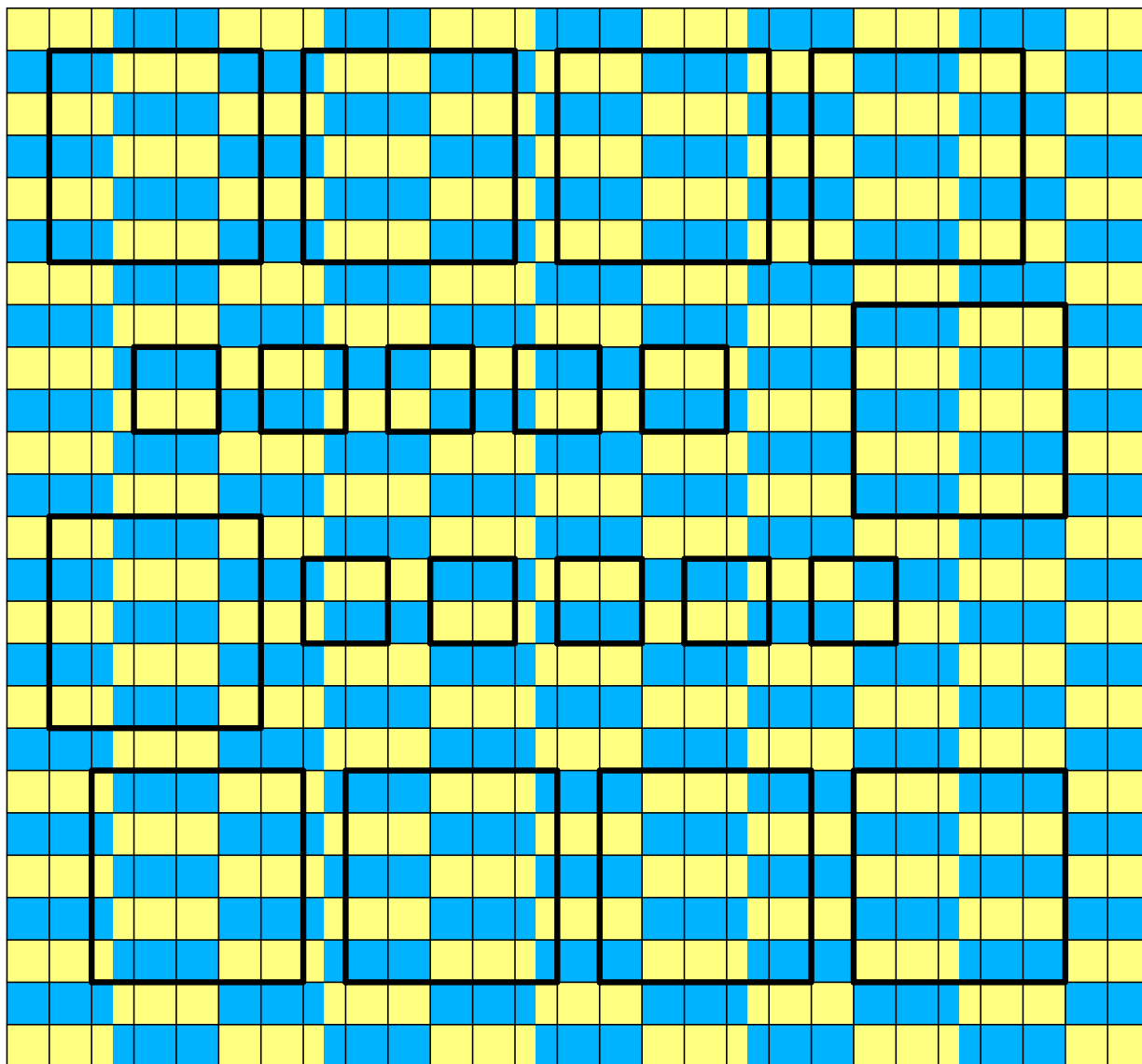
2° Żadnej z liczb nie przypisaliliśmy pary (000, 000). Wówczas każdej z miliona liczb przypisaliliśmy jedną z pozostałych 999999 par. Z zasady szufladkowej Dirichleta wynika, że pewnym dwóm liczbom, niech będą to $p < q$, przypisaliliśmy tę samą parę liczb trzycyfrowych. Skoro liczby px i qx mają po przecinku taką samą trójkę cyfr, ich różnica $(q-p)x$ ma po przecinku trzy zera lub trzy dziewiątki. Identyczne rozumowanie prowadzi do wniosku, że także liczba $(q-p)y$ ma po przecinku trzy zera lub trzy dziewiątki. Zatem warunki zadania są spełnione przez liczbę $n = q - p$.



18. Rozważamy wszystkie możliwe podziały prostokąta 77×75 na kwadraty 1×1 , 2×2 i 5×5 . Wyznacz najmniejszą liczbę kwadratów 1×1 , jaka może pojawić się w takim podziale.

Rozwiązanie

Pokolorujmy prostokąt w żółto-niebieską szachownicę o polach wymiaru $1 \times 2,5$ jak na rys. 1, gdzie zamiast prostokąta 77×75 przedstawiono jego prawy dolny fragment o wymiarach 27×25 .



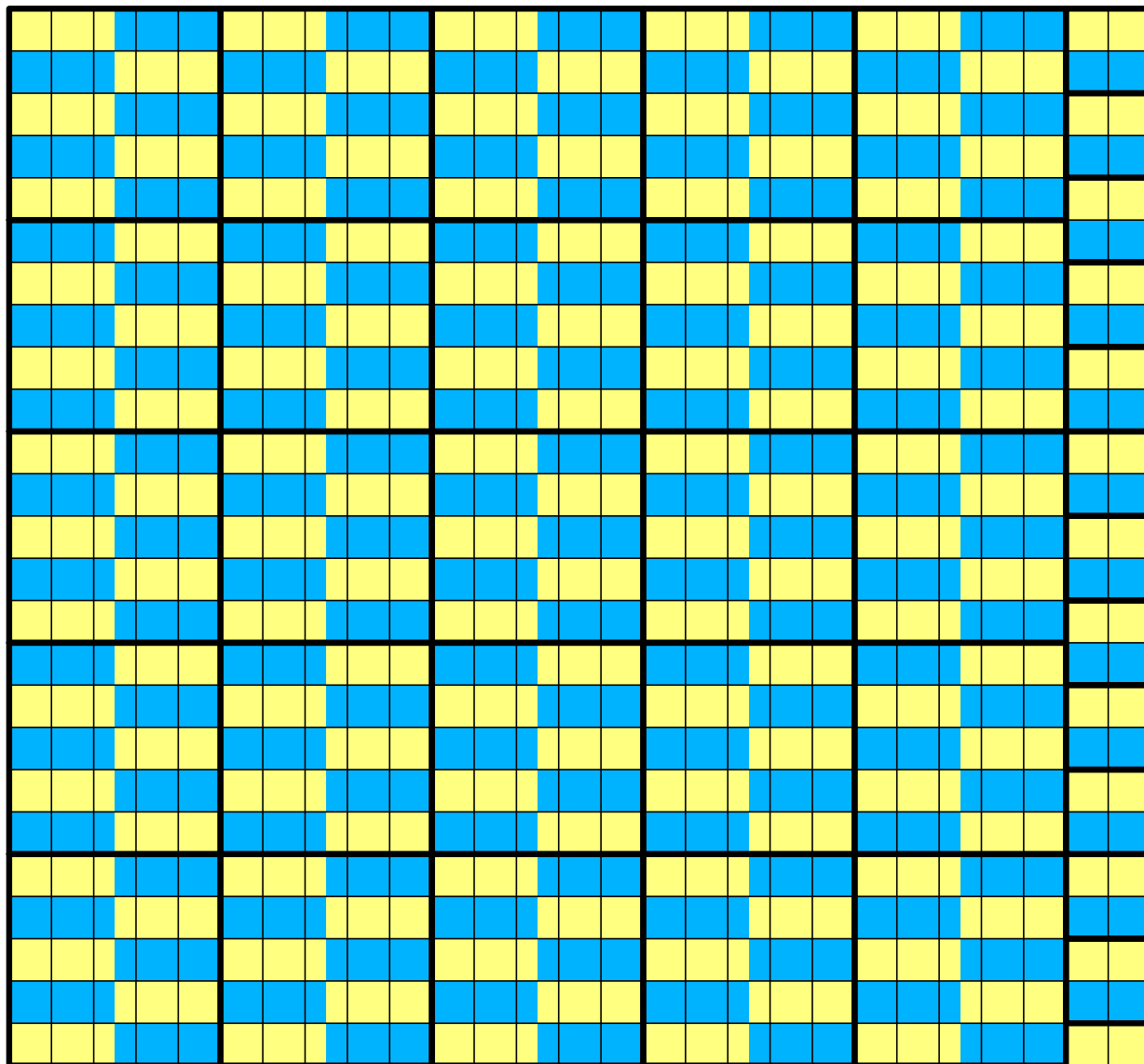
rys. 1

Wówczas każdy kwadrat o wymiarach 2×2 lub 5×5 , umieszczony na wyjściowej szachownicy 77×75 , pokrywa tyle samo pola żółtego, co niebieskiego (patrz rys. 1).

Jednak w całym prostokącie 77×75 pole żółte zajmuje powierzchnię o 2 większą niż pole niebieskie, co można prześledzić na rys. 2: pogrubione kwadraty oraz część szachownicy poza rysunkiem zawierają tyle samo pola żółtego, co niebieskiego.

Stąd wniosek, że w każdym podziale prostokąta 77×75 na kwadraty 1×1 , 2×2 i 5×5 muszą wystąpić co najmniej dwa kwadraty 1×1 .

Na rys. 2 przedstawiono fragment podziału, w którym występują dokładnie dwa kwadraty 1×1 (pozostałą część szachownicy można pokryć kwadratami 5×5 i jedną kolumną kwadratów 2×2).



rys. 2

Odpowiedź

Najmniejsza możliwa liczba kwadratów 1×1 występujących w podziałach prostokąta spełniających warunki zadania jest równa 2.

19. Niech $ABCD$ będzie takim czworokątem wypukłym, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$ oraz punkt przecięcia symetralnych boków DA i BC leży na odcinku AB . Udowodnij, że $AC = BD$.

Rozwiązanie

Niech E będzie punktem przecięcia odcinka AB i symetralnych boków AD i BC . Mamy wówczas $AE = DE$ oraz $BE = CE$. W takim razie mamy również

$$\sphericalangle BED = \sphericalangle EAD + \sphericalangle EDA = 2 \cdot \sphericalangle EAD = 2 \cdot \sphericalangle EBC = \sphericalangle EBC + \sphericalangle ECB = \sphericalangle CEA.$$

Z powyższych równości otrzymujemy przystawanie trójkątów BED i CEA , a więc w szczególności równość odcinków BD i CA .



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPOJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



20. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi nierówność

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{20} + \frac{3}{85} + \frac{4}{260} + \frac{5}{629} + \frac{6}{1300} + \dots + \frac{n}{n^4 + 4} < \frac{3}{8}.$$

Rozwiązanie

Korzystając z równości

$$\begin{aligned} \frac{n}{n^4 + 4} &= \frac{n}{((n-1)^2 + 1) \cdot ((n+1)^2 + 1)} = \frac{((n+1)^2 + 1) - ((n-1)^2 + 1)}{4 \cdot ((n-1)^2 + 1) \cdot ((n+1)^2 + 1)} = \\ &= \frac{1}{4 \cdot ((n-1)^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot ((n+1)^2 + 1)}, \end{aligned}$$

otrzymujemy następujące zależności

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{2}{20} + \frac{3}{85} + \frac{4}{260} + \frac{5}{629} + \frac{6}{1300} + \dots + \frac{n}{n^4 + 4} &= \\ &= \left(\frac{1}{4 \cdot 1} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 10} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 17} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 10} - \frac{1}{4 \cdot 26} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 17} - \frac{1}{4 \cdot 37} \right) + \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{4 \cdot ((n-4)^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot ((n-2)^2 + 1)} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot ((n-3)^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot ((n-1)^2 + 1)} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4 \cdot ((n-2)^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot (n^2 + 1)} \right) + \left(\frac{1}{4 \cdot ((n-1)^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot ((n+1)^2 + 1)} \right) = \\ &= \frac{1}{4 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot (n^2 + 1)} - \frac{1}{4 \cdot ((n+1)^2 + 1)} < \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \end{aligned}$$

co kończy dowód.



Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPOJNOŚCI



Stowarzyszenie
na rzecz Edukacji
Matematycznej

MINISTERSTWO
EDUKACJI
NARODOWEJ



OŚRODEK
ROZWOJU
EDUKACJI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

