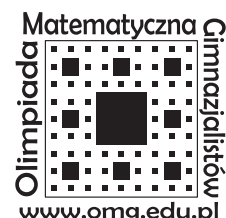


Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013
Seria VIII (luty 2013) — rozwiązania zadań



36. Dla których dodatnich liczb całkowitych n prawdziwe jest poniższe twierdzenie?

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, spełniających nierówność

$$\sum_{i=1}^n x_i^4 + 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 3 \sum_{i=1}^n x_i + n^2, \quad (1)$$

zachodzi nierówność

$$6 \sum_{i=1}^n x_i^3 + 9 \sum_{i=1}^n x_i < 4n + n^2. \quad (2)$$

Rozwiązanie

Udowodnimy najpierw, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n i dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, spełniających nierówność (1), prawdziwa jest słaba wersja nierówności (2), a mianowicie

$$6 \sum_{i=1}^n x_i^3 + 9 \sum_{i=1}^n x_i \leq 4n + n^2. \quad (3)$$

W tym celu zauważmy, że nierówność (3) otrzymujemy z nierówności (1) przez dodanie do niej stronami nierówności

$$-\sum_{i=1}^n x_i^4 + 6 \sum_{i=1}^n x_i^3 - 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 9 \sum_{i=1}^n x_i \leq -3 \sum_{i=1}^n x_i + 4n. \quad (4)$$

Nierówność (4) możemy przekształcić do równoważnych postaci:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n x_i^4 - 6 \sum_{i=1}^n x_i^3 + 13 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 12 \sum_{i=1}^n x_i + 4n, \\ 0 &\leq \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 6x_i^3 + 13x_i^2 - 12x_i + 4), \\ 0 &\leq \sum_{i=1}^n ((x_i - 1)^2 \cdot (x_i - 2)^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Nierówność (5) jest prawdziwa, gdyż suma kwadratów liczb rzeczywistych jest nieujemna. Zatem nierówność (4) jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, a w konsekwencji udowodniliśmy, że nierówność (3) wynika z nierówności (1).

Pozostaje zbadać, kiedy, przy założeniu prawdziwości (1), w nierówności (3) zachodzi równość. Otóż ma to miejsce tylko wtedy, gdy obie nierówności (1) oraz (5) są równościami. Łatwo widać, że nierówność (5) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy każda z liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest równa 1 lub 2. Z kolei nierówność (1) można przepisać w postaci

$$\sum_{i=1}^n (x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i) \leq n^2. \quad (6)$$

Zauważmy, że jeżeli $x_i = 1$, to $x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i = 11$, a jeżeli $x_i = 2$, to $x_i^4 + 13x_i^2 - 3x_i = 62$. Jeżeli więc wśród liczb $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ jest k liczb równych 2 oraz $n - k$ równych 1, to lewa strona nierówności (6) ma wartość

$$k \cdot 62 + (n - k) \cdot 11 = 11 \cdot n + 51 \cdot k.$$

Należy zatem wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których istnieje nieujemna liczba całkowita $k \leq n$, spełniająca równanie $11 \cdot n + 51 \cdot k = n^2$, czyli

$$51 \cdot k = n \cdot (n - 11)$$

lub inaczej

$$\frac{k}{n} = \frac{n - 11}{51}. \quad (7)$$

Wobec równości (7), nierówności $0 \leq k \leq n$ są równoważne nierównościom $0 \leq n - 11 \leq 51$, czyli $11 \leq n \leq 62$.

Szukamy więc takich liczb n , że $11 \leq n \leq 62$, a ponadto liczba $n \cdot (n - 11)$ jest podzielna przez 51. Liczba $n \cdot (n - 11)$ jest podzielna przez $51 = 3 \cdot 17$ w następujących przypadkach:

1° Liczba n jest podzielna przez 51. To prowadzi do $n = 51$.

2° Liczba $n - 11$ jest podzielna przez 51. To prowadzi do $n = 11$ oraz $n = 62$.

3° Liczba n jest podzielna przez 17, a liczba $n - 11$ jest podzielna przez 3. To prowadzi do $n = 17$.

4° Liczba $n - 11$ jest podzielna przez 17, a liczba n jest podzielna przez 3. To prowadzi do $n = 45$.

Podsumujmy: dla dowolnego n i dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, z nierówności (1) wynika nierówność (3), a przy tym równość w (3) może zajść tylko dla pięciu wartości n . Dla pozostałych n zachodzi ostra nierówność (3), czyli (2).

Odpowiedź

Warunki zadania spełniają wszystkie dodatnie liczby całkowite n za wyjątkiem następujących pięciu liczb: 11, 17, 45, 51, 62.

37. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n liczba $(3m)! \cdot (3n)!$ jest podzielna przez $m! \cdot n! \cdot ((m+n)!)^2$.

Rozwiązanie

Dla dowodu podanej w treści zadania podzielności wystarczy wykazać, że dowolna liczba pierwsza p wchodzi do rozkładu liczby $m! \cdot n! \cdot ((m+n)!)^2$ na czynniki pierwsze z wykładnikiem nie większym niż do rozkładu liczby $(3m)! \cdot (3n)!$.

Skorzystamy z następującego lematu, którego dowód znajduje się w rozwiązaniu zadania 31 z Ligi OMG (seria VII, styczeń 2013):

Lemat

Liczba pierwsza p występuje w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $N!$ z wykładnikiem

$$\left[\frac{N}{p} \right] + \left[\frac{N}{p^2} \right] + \left[\frac{N}{p^3} \right] + \left[\frac{N}{p^4} \right] + \dots,$$

gdzie $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od liczby x .

Uwaga

Powyższa suma jest skończona, gdyż od pewnego miejsca występujące w niej składniki są równe 0.



Wobec powyższego, w celu rozwiązania zadania należy udowodnić, że dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnych dodatnich liczb całkowitych m, n zachodzi nierówność

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{p^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \dots + 2 \cdot \left\lfloor \frac{m+n}{p} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{m+n}{p^2} \right\rfloor + 2 \cdot \left\lfloor \frac{m+n}{p^3} \right\rfloor + \dots \leq \\ \leq \left\lfloor \frac{3m}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3m}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3m}{p^3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{3n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3n}{p^3} \right\rfloor + \dots \end{aligned}$$

Wystarczy, jeśli wykazemy, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$[x] + [y] + 2 \cdot [x+y] \leq [3x] + [3y]. \quad (8)$$

Niech $s = x - [x]$ oraz $t = y - [y]$ będą częściami ułamkowymi odpowiednio liczb x i y . Wówczas $0 \leq s < 1$, $0 \leq t < 1$, a ponadto

$$[x] + [y] + 2 \cdot [x+y] = [x] + [y] + 2 \cdot ([x] + [y] + [s+t]) = 3 \cdot [x] + 3 \cdot [y] + 2 \cdot [s+t]$$

oraz

$$[3x] + [3y] = 3 \cdot [x] + [3s] + 3 \cdot [y] + [3t].$$

Zatem dla dowodu nierówności (8) wystarczy wykazać, że

$$2 \cdot [s+t] \leq [3s] + [3t]. \quad (9)$$

Jeżeli $s+t < 1$, to lewa strona nierówności (9) jest równa 0, a prawa jest nieujemna, nierówność ta jest więc prawdziwa.

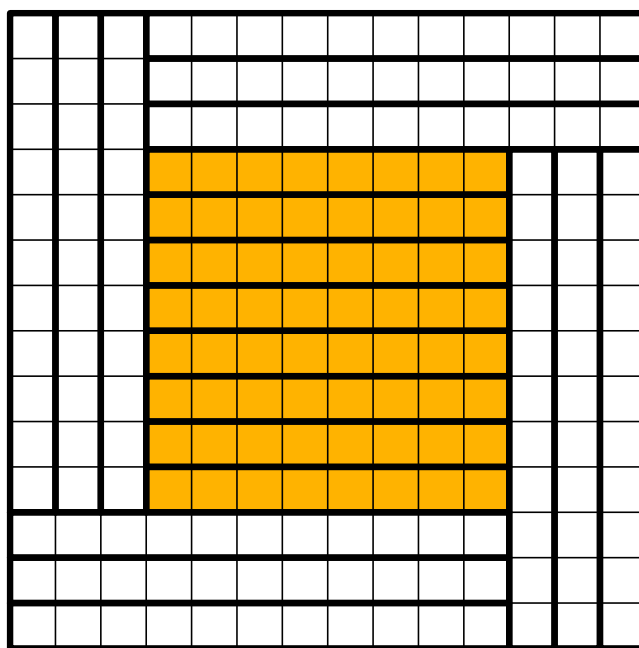
Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy $s+t \geq 1$. Z nierówności $s+t < 2$ otrzymujemy $[s+t] = 1$, skąd wynika, że lewa strona nierówności (9) jest równa 2. Bez szkody dla ogólności rozumowania możemy założyć, że $s \geq t$. Jeżeli $s \geq 2/3$, to $2 \leq 3s < 3$, czyli $[3s] = 2$. Wtedy $2 \cdot [s+t] = [3s]$ i nierówność (9) jest prawdziwa. Jeśli zaś $s < 2/3$, to $t > 1/3$. Wówczas $1/3 < t \leq s < 2/3$ i w konsekwencji $[3s] = [3t] = 1$, a zatem obie strony nierówności (9) są równe 2.

Tak więc udowodniliśmy nierówność (9), co kończy rozwiązanie zadania.

38. Rozstrzygnij, czy sześcián o krawędzi 14 można wypełnić prostopadłościennymi klockami o wymiarach $1 \times 1 \times 8$ oraz $1 \times 1 \times 11$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że kwadrat o boku 14 można podzielić na prostokąty 1×8 (żółte) oraz 1×11 (białe) jak na rysunku 1. To oznacza, że prostopadłościán $1 \times 14 \times 14$ można wypełnić klockami $1 \times 1 \times 8$ oraz $1 \times 1 \times 11$. Ponieważ sześcián o krawędzi 14 można podzielić na 14 takich prostopadłościánów, także ten sześcián daje się wypełnić opisanymi w zadaniu klockami.



rys. 1



39. Rozstrzygnij, czy sześcian o krawędzi 15 można wypełnić prostopadłościami o wymiarach $1 \times 1 \times 8$ oraz $1 \times 1 \times 11$.

Rozwiązanie

Udowodnimy, że takie wypełnienie sześcianu nie jest możliwe.

Najpierw poszukamy 15-wyrazowego ciągu liczb $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15})$ o następujących własnościach:

- (a) suma dowolnych 8 kolejnych wyrazów jest równa 0,
- (b) suma dowolnych 11 kolejnych wyrazów jest równa 0,
- (c) suma wszystkich 15 wyrazów jest różna od 0.

Z własności (a) oraz (b) wynika, że ciąg jest okresowy o okresie 8 i jednocześnie okresowy o okresie 11. W konsekwencji

$$a_1 = a_9, \quad a_2 = a_{10}, \quad a_3 = a_{11}, \quad a_4 = a_{12}, \quad a_5 = a_{13}, \quad a_6 = a_{14}, \quad a_7 = a_{15}$$

oraz

$$a_1 = a_{12}, \quad a_2 = a_{13}, \quad a_3 = a_{14}, \quad a_4 = a_{15},$$

co po uporządkowaniu sprowadza się do

$$a_1 = a_4 = a_7 = a_9 = a_{12} = a_{15}, \quad a_2 = a_5 = a_{10} = a_{13}, \quad a_3 = a_6 = a_{11} = a_{14}.$$

Należy zwrócić uwagę, że w powyższych równościach nie występuje wyraz a_8 .

Po oznaczeniu a_1, a_2, a_3, a_8 odpowiednio przez x, y, z, t , możemy zapisać ciąg w postaci

$$(x, y, z, x, y, z, x, t, x, y, z, x, y, z, x).$$

Warunki (a), (b) i (c) wyglądają wówczas tak:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z + t = 0 \\ 4x + 3y + 3z + t = 0 \\ 6x + 4y + 4z + t \neq 0. \end{cases}$$

Odejmując stronami pierwszą równość od drugiej i trzeciego warunku, otrzymujemy

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z \neq 0. \end{cases}$$

Odjęcie stronami podwojonej drugiej równości od pierwszego i trzeciego warunku prowadzi do

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Jednym z wielu rozwiązań powyższego układu jest $x = 1, t = -1, y = -1, z = 0$, co daje ciąg

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{15}) = (1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1)$$

o sumie wszystkich 15 wyrazów równej 1.

Podzielmy teraz sześcian o krawędzi 15 na 15^3 sześcianów jednostkowych. Położenie każdego sześcianu jednostkowego określamy trójką współrzędnych całkowitych z zakresu od 1 do 15. Sześcianowi o współrzędnych (i, j, k) przypiszmy iloczyn $a_i a_j a_k$. Wówczas



każdy klocek o wymiarach $1 \times 1 \times 8$ lub $1 \times 1 \times 11$ ułożony tak, aby pokrywał odpowiednio 8 lub 11 sześciątów, pokrywa sześciiany o sumie przypisanych liczb równej 0. Wynika to ze spostrzeżenia, że pokrywane przez klocek sześciiany mają na jednej współrzędnej kolejne liczby, podczas gdy na każdej z pozostałych dwóch współrzędnych wszystkie sześciiany pokrywane przez ten klocek mają tę samą liczbę. Przykładowo, dla klocka pokrywającego sześciiany jednostkowe o współrzędnych

$(i, j, k), (i, j+1, k), (i, j+2, k), (i, j+3, k), (i, j+4, k), (i, j+5, k), (i, j+6, k), (i, j+7, k)$,
suma liczb przypisanych tym sześciątom jest równa

$$\begin{aligned} a_i a_j a_k + a_i a_{j+1} a_k + a_i a_{j+2} a_k + a_i a_{j+3} a_k + a_i a_{j+4} a_k + a_i a_{j+5} a_k + a_i a_{j+6} a_k + a_i a_{j+7} a_k = \\ = a_i \cdot (a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + a_{j+3} + a_{j+4} + a_{j+5} + a_{j+6} + a_{j+7}) \cdot a_k = a_i \cdot 0 \cdot a_k = 0. \end{aligned}$$

Tymczasem suma liczb przypisanych wszystkim 15^3 sześciątom jest równa

$$\sum_{i=1}^{15} \sum_{j=1}^{15} \sum_{k=1}^{15} a_i a_j a_k = \left(\sum_{i=1}^{15} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{15} a_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{15} a_k \right) = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15})^3 = 1^3 = 1.$$

Stąd wniosek, że niemożliwe jest wypełnienie sześcianu o krawędzi 15 przy użyciu klocków $1 \times 1 \times 8$ oraz $1 \times 1 \times 11$.

40. Proste PA i PB są styczne do okręgu o odpowiednio w punktach A i B . Punkt F jest rzutem prostokątnym punktu B na średnicę AE okręgu o . Wykaż, że środek odcinka BF leży na prostej EP .

Rozwiązanie

Niech X będzie punktem przecięcia prostych AP i BE . Ponieważ kąt ABE jest prosty jako kąt wpisany w okrąg o oparty na średnicy, to również kąt ABX jest prosty. Wiemy też, że $PA = PB$, jako odcinki styczne do okręgu o . Wobec tego punkt P leży na przecięciu przeciwprostokątnej XA trójkąta XAB i symetralnej jego boku AB , jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Stąd punkt P jest również środkiem odcinka XA .

Proste XA i BF są równoległe, ponieważ obie są prostopadłe do prostej AE . Ponadto punkt E jest punktem przecięcia prostych XB i AF . W takim razie istnieje jednokładność o środku E , przekształcająca odcinek XA na odcinek BF . Punkt P , jako środek odcinka XA , przechodzi w tej jednokładności na środek odcinka BF . Stąd punkty E , P i środek odcinka BF są współliniowe jako, odpowiednio, środek jednokładności, punkt i jego obraz.



Urszula Pastwa
Kierownik naukowy obozu