

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

Liga zadaniowa 2012/2013

Seria IX (marzec 2013)



41. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz takie liczby całkowite a, b , że liczba $a - b$ jest podzielna przez n . Udowodnij, że liczba $a^n - b^n$ jest podzielna przez n^2 .

42. Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n , że równanie

$$\frac{x^2}{x+1} + \frac{y^2}{y+1} + \frac{z^2}{z+1} = n$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych x, y, z .

43. Dane są takie punkty A, B, C, X, Y , że punkty A, B, C leżą po tej samej stronie prostej XY oraz zachodzą następujące równości kątów:

$$\sphericalangle AXY = \sphericalangle YBX = \sphericalangle XYC,$$

$$\sphericalangle XYA = \sphericalangle BXY = \sphericalangle YCX.$$

Wykaż, że trójkąt ABC jest podobny do trójkąta AXY .

44. Dany jest czworościan $ABCD$. Udowodnij, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

45. Ciocia ma 8 woreczków z cukierkami. W każdym woreczku znajduje się nie mniej niż 79 i nie więcej niż 97 cukierków. Udowodnij, że ciocia może obdarować Stasia i Zosię tak, aby każde z dzieci dostało woreczki zawierające łącznie taką samą liczbę cukierków.



Urszula Pastwa
Kierownik naukowego obozu

