II Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

(zawody stopnia drugiego)

13 stycznia 2007 r.

Szkice rozwiązań

---

1. *Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań:*

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=23 \\ a+2b+4c=22 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Drugie równanie mnożymy stronami przez 2 i odejmujemy stronami od pierwszego. W efekcie uzyskujemy $a^2-2a+b^2-4b+c^2-8c+21=0$, co po skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia jest równoważne zależności $(a-1)^2+(b-2)^2+(c-4)^2=0$. Stąd wynika, że $a=1$, $b=2$, $c=4$. Jednak bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójka ta nie spełnia danego układu równań. Układ ten nie ma zatem rozwiązań.

---

2. *Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120°. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.*

Rozwiązanie

Niech $P=FA\cap BC$, $Q=BC\cap DE$, $R=DE\cap FA$. Wtedy trójkąty ABP, CDQ, EFR są równoboczne. Zatem symetralna odcinka AB jest jednocześnie dwusieczną kąta APB trójkąta ABP, a więc również dwusieczną kąta RPQ trójkąta PQR. Analogicznie, symetralne odcinków CD i EF są odpowiednio dwusiecznymi kątów PQR i QRP trójkąta PQR. A zatem rozpatrywane symetralne przecinają się w jednym punkcie.

Uwaga: Rozpatrywany sześciokąt $ABCDEF$ nie musi być foremny.

---

3. *W przestrzeni danych jest 6 punktów, z których żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Łącząc niektóre z tych punktów narysowano 10 odcinków. Wykaż, że w ten sposób uzyskano co najmniej jeden trójkąt.*

Rozwiązanie

Zauważmy najpierw, że z pewnego punktu wychodzą co najmniej 4 odcinki; w przeciwnym razie wszystkich odcinków byłoby co najwyżej $\frac{3\cdot 6}{2}=9$, a jest ich 10. Oznaczmy więc dane punkty przez A, B, C, D, E, F oraz przyjmijmy, że punkt A jest połączony z punktami B, C, D, E.

Z punktu F wychodzi co najwyżej pięć odcinków, a zatem skoro wszystkich odcinków jest 10, to pewne dwa punkty spośród B, C, D, E muszą być połączone. Punkty te wraz z punktem A dają żądany trójkąt.

---

4. *Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że liczba $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ jest w systemie dziesiętnym zakończona cyframi „10”? Odpowiedź uzasadnij.*

Rozwiązanie

Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, lecz niepodzielna przez 4. Wobec tego dokładnie jeden z czynników $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+a)$ rozpatrywanej liczby jest parzysty, pozostałe trzy są nieparzyste. Jednak wtedy liczba

$$(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)=2(a+b+c+d)$$

byłaby liczbą nieparzystą. Uzyskaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby a, b, c, d spełniające podane w treści zadania warunki.

---

5. *Trójkąt ABC jest podstawą ostrosłupa $ABCS$, w którym*

$$\sphericalangle ASB=\sphericalangle BSC=\sphericalangle CSA=20^\circ.$$

Wykaż, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości każdej z krawędzi AS, BS i CS.

Rozwiązanie

Rozetnijmy powierzchnię ostrosłupa wzdłuż krawędzi AC, BC, SC, po czym rozłóżmy ją na płaszczyźnie. W ten sposób uzyskujemy siatkę ostrosłupa $ABCS$, składającą się z trójkątów ABS, ABC_1, ASC_2, BSC_3. Ponieważ $SC_2=SC_3$ oraz

$$\sphericalangle C_2SC_3=\sphericalangle ASB+\sphericalangle BSC+\sphericalangle CSA=3\cdot 20^\circ=60^\circ,$$

więc trójkąt C_2C_3S jest równoboczny. Stąd

$$CA+AB+BC=C_2A+AB+BC_3\geqslant C_2C_3=SC_2=CS.$$

Analogicznie dowodzimy, że obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od długości krawędzi AS i BS, co kończy rozwiązanie zadania.