IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów polegają na rozwiązywaniu przez uczniów siedmiu zadań. Uczestnicy mogą korzystać z książek, konsultować się z nauczycielem, jednak muszą rozwiązywać zadania samodzielnie.

Nie jest konieczne rozwiązanie wszystkich zadań. Uczeń, który rozwiąże część z nich, także może zostać zakwalifikowany do zawodów stopnia drugiego.

Rozwiązania poszczególnych zadań należy zapisać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, adres domowy, adres e-mail, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do koordynatora okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły. Adresy koordynatorów, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, zadania z poprzednich edycji OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem

`www.om.edu.pl/omg`

Zachęcamy Gimnazjalistów do wzięcia udziału w zawodach.

Uwaga: Począwszy od tegorocznej edycji, uczniowie przesyłają swoje prace bezpośrednio do koordynatora, bez uprzedniej oceny rozwiązań przez nauczyciela matematyki.

Terminarz IV Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów

- termin przesłania rozwiązań zadań zawodów I stopnia do koordynatora okręgowego: **27 października 2008 r.** (decyduje data stempla pocztowego)
- termin zawodów II stopnia: 17 stycznia 2009 r.
- termin zawodów III stopnia: 14 marca 2009 r.

IV Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów
Zawody stopnia pierwszego
(1 września 2008 r. – 27 października 2008 r.)

1. Wyznacz w zależności od parametru a liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ |x|+a=y \end{cases}$$

2. Dany jest prostopadłościan o podstawie kwadratowej. Przekątna tego prostopadłościanu ma długość d, a jego pole powierzchni jest równe b. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku 1 oraz prosta ℓ przechodząca przez jego środek. Niech a, b, c, d oznaczają odpowiednio odległości punktów A, B, C, D od prostej ℓ. Wykaż, że

$$a^2+b^2+c^2+d^2=1\,.$$

4. Wyznacz wszystkie takie pary (a,b) dodatnich liczb całkowitych, że liczba $a+b$ jest liczbą pierwszą oraz liczba a^3+b^3 jest podzielna przez 3.

5. W trójkącie ABC dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D. Długości boków BC i AC są równe odpowiednio a i b, a długość odcinka CD jest równa d. Wykaż, że

$$d<\frac{2ab}{a+b}\,.$$

6. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na niebiesko lub czerwono. Udowodnij, że istnieje trójkąt prostokątny równoramienny, którego wierzchołki są tego samego koloru.

7. Czy istnieje taki wielościan, którego rzuty prostokątne na pewne trzy płaszczyzny są odpowiednio czworokątem, sześciokątem i ośmiokątem? Odpowiedź uzasadnij.