STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ GIMNAZJALISTÓW

Treści zadań Obozu Naukowego OMG

Poziom OMG
2015 rok

SZCZYRK 2015

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$. Wyznacz sumę

$$\sphericalangle ACE+\sphericalangle BDA+\sphericalangle CEB+\sphericalangle DAC+\sphericalangle EBD.$$

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne $n\geqslant 6$ o następującej własności: Spośród wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1 można wybrać sześć wierzchołków wyznaczających sześciokąt, którego każdy bok ma długość nie większą od 1.

3. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n\geqslant 3$, umieszczono lampę oraz przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) dwóch lamp w wierzchołkach sąsiadujących z tym wierzchołkiem. Początkowo dwie lampy w kolejnych wierzchołkach są zapalone, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=90^\circ$. Na bokach BC, CA, AB tego trójkąta wybrano odpowiednio takie punkty D, E, F, że

$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDF,\quad \sphericalangle BFD=\sphericalangle AFE,\quad \sphericalangle AEF=\sphericalangle BEC.$$

Udowodnij, że $AD+DF=BE+EF$.

5. Kwadrat o boku 107 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie narożnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

6. Kwadrat o boku 109 podzielono na kwadraty jednostkowe. Rozstrzygnij, czy figurę powstałą z dużego kwadratu przez usunięcie centralnego kwadratu jednostkowego można podzielić na prostokąty o wymiarach 1×4.

7. Dany jest wielościan wypukły, którego każdą ścianę pomalowano na czerwono lub niebiesko w taki sposób, że każde dwie ściany mające wspólną krawędź mają różny kolor. Wykaż, że jeśli w dany wielościan można wpisać sferę, to suma pól jego czerwonych ścian jest równa sumie pól jego niebieskich ścian.

Uwaga: Sferą wpisaną w wielościan nazywamy sferę styczną do wszystkich jego ścian.

8. Rozstrzygnij, czy dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ spełniających warunek

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=n$$

zachodzi nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n+x_{n-1}x_nx_1+x_nx_1x_2 \leqslant n.$$

Drugie zawody indywidualne

9. Rozstrzygnij, czy równanie

$$a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=6f^6$$

ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d, e, f.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, którego wysokości przecinają się w punkcie H. Punkty K i L są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Okręgi opisane na trójkątach ABH i CKL przecinają się w punkcie P różnym od H. Wykaż, że punkty C, M, P leżą na jednej prostej.

11. Wykaż, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 spełniających warunek

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6$$

zachodzi nierówność

$$x_1x_2x_3+x_2x_3x_4+x_3x_4x_5+x_4x_5x_6+x_5x_6x_1+x_6x_1x_2 \leqslant 8.$$

12. Plansza do gry ma pięć pól umieszczonych w wierzchołkach pięciokąta foremnego. Dozwolony ruch polega na zabraniu dwóch żetonów z dowolnego pola, na którym jest więcej niż jeden żeton i położeniu jednego żetonu na następnym polu, licząc w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Początkowo na każdym polu znajduje się 2015 żetonów. Rozstrzygnij, czy wykonując ciąg dozwolonych ruchów można doprowadzić do stanu, w którym na planszy pozostanie mniej niż pięć żetonów.

Trzecie zawody indywidualne

13. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że

$$AP+BP<AC+BC.$$

14. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek a, b, c dodatnich liczb całkowitych spełniających równanie

$$(a^2+1)\cdot(b^2+1)=c^2+1.$$

15. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z spełniających warunki

$$x^2+y^2+z^2\leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad 2x+3y+6z\geqslant 7$$

zachodzi nierówność

$$7xy\geqslant z.$$

16. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB=60^\circ$. Na bokach BC i AC leżą odpowiednio takie punkty D i E, że $BD=DE=EA$. Udowodnij, że $\sphericalangle ABE=30^\circ$.

Czwarte zawody indywidualne

17. Liczby rzeczywiste a, b, c, d, e, f spełniają równanie

$$2ab+6bc+12cd+20de+30ef+6fa=a^2+4b^2+9c^2+16d^2+25e^2+36f^2.$$

Udowodnij, że $af=bc$.

18. W turnieju szachowym startuje $2n$ zawodników, gdzie $n\geqslant 2$ jest liczbą naturalną. Udowodnij, że można tak zaplanować rozgrywki składające się z $2n-1$ rund, aby każdy szachista rozegrał z każdym innym dokładnie jedną partię szachów.

Uwaga: W każdej rundzie każdy z zawodników rozgrywa dokładnie jedną partię szachów.

19. Dwa przystające okręgi przecinają się w punktach A i B. Prosta przechodząca przez punkt A przecina okręgi w takich punktach C i D różnych od A, że punkt A należy do odcinka CD. Wykaż, że $BC=BD$.

20. Udowodnij, że istnieje 2015 kolejnych dodatnich liczb całkowitych, które nie są postaci a^2b^3, gdzie a i b są dodatnimi liczbami całkowitymi.

21. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$. Na bokach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty D i E, że $AB=BD=DE$ oraz $AD=CE$. Wyznacz miarę kąta ACB.

Mecz matematyczny

22. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 4$ oraz dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$x_1x_2^2x_3^3 + x_2x_3^2x_4^3 + x_3x_4^2x_5^3 + \ldots$$

$$\ldots + x_{n-2}x_{n-1}^2x_n^3 + x_{n-1}x_n^2x_1^3 + x_nx_1^2x_2^3 \leqslant x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + \ldots + x_n^6.$$

23. Przez punkt A poprowadzono proste styczne do okręgu ω w punktach B i C. Prosta l przechodząca przez punkt A przecina okrąg ω w różnych punktach D i E. Prosta równoległa do DE przechodząca przez punkt B przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie X. Udowodnij, że prosta XC przechodzi przez środek odcinka DE.

24. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k istnieje taka liczba pierwsza $p > k$, że k liczb całkowitych bezpośrednio poprzedzających liczbę p, a także k liczb całkowitych bezpośrednio po niej następujących, to liczby złożone.

W rozwiązaniu możesz skorzystać bez dowodu z następującego twierdzenia: Dla dowolnych względnie pierwszych dodatnich liczb całkowitych a i b istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $a+bn$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

25. Udowodnij, że równanie $m^2 + n^2 = 6^k$ nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych m, n, k.

26. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 120°$. Dwusieczne kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A, B, C przecinają przeciwległe boki odpowiednio w punktach D, E, F. Udowodnij, że $\sphericalangle DFE = 90°$.

27. Udowodnij, że dla dowolnej liczby pierwszej p oraz dowolnej dodatniej liczby całkowitej $r < p$ istnieją takie dodatnie liczby całkowite a i b mniejsze od $\sqrt{p}$, że $ar \equiv \pm b \pmod{p}$.

28. W każdym z wierzchołków n-kąta foremnego, gdzie $n \geqslant 4$, umieszczono lampę oraz przełącznik, który zmienia stan (zapalona/zgaszona) trzech lamp leżących w bezpośrednim sąsiedztwie tej lampy: dwóch w kierunku zegarowym i jednej w kierunku przeciwzegarowym. Początkowo jedna lampa jest zapalona, a pozostałe zgaszone. Rozstrzygnij, w zależności od n, czy używając dostępnych przełączników można doprowadzić do stanu, w którym wszystkie lampy są zgaszone.

29. Rozstrzygnij, czy punkty płaszczyzny można pokolorować czterema kolorami w taki sposób, aby spełnione były następujące dwa warunki:
• każde koło o średnicy większej od 2 zawiera we wnętrzu punkty wszystkich czterech kolorów;
• każde koło o średnicy mniejszej od 1 zawiera we wnętrzu punkty co najwyżej dwóch kolorów.

30. Ciągi (a_n) i (b_n) są określone następującymi wzorami:

$$a_0 = 99\,999, \qquad a_1 = 1\,699\,999, \qquad b_0 = 1, \qquad b_1 = 5,$$
$$a_{n+2} = 10a_{n+1} - 9a_n \qquad \text{oraz} \qquad b_{n+2} = 10b_{n+1} - 8b_n \qquad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Wykaż, że $a_{2015} < b_{2015}$.

31. Udowodnij, że sześcianu o krawędzi 61 nie można wypełnić klockami, z których każdy jest sześcianem o krawędzi 2 lub prostopadłościanem o wymiarach $3 \times 3 \times 1$.

32. Pewne n wierzchołków $3n$-kąta foremnego pomalowano na czerwono. Wierzchołki wielokąta należy pogrupować w n rozłącznych trójek takich, że każda zawiera dokładnie jeden czerwony wierzchołek. Udowodnij, że można to uczynić tak, aby każde dwa trójkąty wyznaczone przez różne trójki miały punkt wspólny.