STOWARZYSZENIE NA RZECZ EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
KOMITET GŁÓWNY OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ JUNIORÓW

Obóz Naukowy OMJ

Poziom OMJ
2017 rok

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

SZCZYRK 2017

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku

Treści zadań

Pierwsze zawody indywidualne

1. Punkt P należy do wnętrza kwadratu $ABCD$. Punkty K, L, M, N są środkami odpowiednio boków AB, BC, CD, DA. Pola czworokątów $AKPN$, $BLPK$ i $CMPL$ są równe odpowiednio 16, 20 i 32. Oblicz pole czworokąta $DNPM$.

2. Udowodnij nierówność
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}<9.$$

3. Partia trioszachów rozgrywana jest na trójstronnej szachownicy przez trzech graczy. W turnieju trioszachowym wzięło udział 101 zawodników, z których każdy rozegrał co najwyżej 50 partii. Udowodnij, że istnieje dwóch zawodników, którzy nie grali w tej samej partii.

4. Na boku AB trójkąta ABC wybrano punkt K. Prosta CK przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punktach C i M. Wykaż, że przy ustalonych punktach A, B, C środki okręgów opisanych na trójkątach AMK leżą na pewnej prostej.

5. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele czwórek dodatnich liczb całkowitych a, b, c, d spełniających równanie
$$a^2+b^3=c^2+d^3$$
oraz warunki $a<c$ i $\mathrm{NWD}(a,\, b,\, c,\, d)=1$.

6. Udowodnij, że nie istnieją 333 kolejne liczby pierwsze, których suma kwadratów jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Dany jest trójkąt ASD oraz półprosta ℓ będąca dwusieczną kąta ASD. Okrąg ω_1 jest styczny do SA i ℓ odpowiednio w punktach A i B, okrąg ω_2 zaś jest styczny do ℓ i SD odpowiednio w punktach C i D. Prosta AC przecina okrąg ω_1 po raz drugi w punkcie K, a prosta BD przecina okrąg ω_2 po raz drugi w punkcie L. Wykaż, że prosta KL jest styczna do okręgów ω_1 i ω_2.

8. Każdy z wierzchołkow 666-kąta foremnego pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Okazało się, że nie istnieje trójkąt o wierzchołkach tego samego koloru mający kąt $30°$. Udowodnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny o wierzchołkach tego samego koloru.

Drugie zawody indywidualne

9. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby naturalne a,b,c,d,e większe od 2^{2017} spełniające równanie
$$a^{256}+b^{256}+c^{256}+d^{256}=e^2$$
oraz warunek $\mathrm{NWD}(a,b,c,d,e)=1$.

10. Dany jest prostokąt $ABCD$. Na odcinku BC i prostej CD wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że kąt KAL jest prosty. Proste KL i BD przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że proste AS i KL są prostopadłe.

11. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$12\cdot(ab+bc+ca)<7a^2+15b^2+18c^2.$$

12. Rozstrzygnij, czy szachownicę o boku 27 z usuniętym narożnym polem można pokryć klockami o wymiarach 1×4.

13. Rozstrzygnij, czy szachownicę o boku 27 z usuniętym centralnym polem można pokryć klockami o wymiarach 1×4.

Trzecie zawody indywidualne

14. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AD i BE. Prosta DE przecina przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punktach K i L. Udowodnij, że $CK=CL$.

15. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba

$$66^{n+1}-25^n$$

jest złożona.

16. Niech x będzie taką liczbą rzeczywistą dodatnią, że liczba $x+\dfrac{1}{x}$ jest wymierna. Udowodnij, że liczba $x^5+\dfrac{1}{x^5}$ jest wymierna.

17. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt T jest środkiem krótszego łuku BC okręgu opisanego na tym trójkącie, a punkt M jest środkiem odcinka AB. Punkt K jest symetryczny do punktu M względem symetralnej odcinka AT. Wykaż, że $AK=KC$.

Czwarte zawody indywidualne

18. Na płaszczyźnie danych jest n punktów zielonych, n punktów czerwonych i n punktów niebieskich, z których żadne trzy nie są współliniowe. Rozstrzygnij, w zależności od $n>1$, czy zawsze można wybrać n trójkątów o różnokolorowych wierzchołkach i rozłącznych obwodach.

19. Udowodnij, że równanie

$$a_1^{22}+a_2^{22}+\ldots+a_{22}^{22}=23b^{22}$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych a_1, a_2, $\ldots$, a_{22}, b.

20. Na trójkącie ABC opisano okrąg ω. Dwusieczna kąta ACB przecina bok AB w punkcie D, a okrąg ω w drugim punkcie E. Punkt M jest środkiem boku AB. Okrąg opisany na trójkącie DEM przecina okrąg ω w punkcie T różnym od E. Wykaż, że $\sphericalangle MCE = \sphericalangle ECT$.

21. Rozstrzygnij, czy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \leqslant ab^4 + bc^4 + ca^4.$$

22. Rozstrzygnij, czy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 \leqslant a^5 + b^5 + c^5.$$

Mecz matematyczny

23. Udowodnij, że spośród dowolnych 100 podzbiorów zbioru 10-elementowego można wybrać dwa o różnicy symetrycznej co najwyżej dwuelementowej.

Uwaga: Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

24. Styczne do okręgu ω w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Punkt M jest środkiem odcinka AP, punkt N zaś drugim punktem przecięcia prostej BM z okręgiem ω. Wykaż, że $PN = 2MN$.

25. Dodatnie liczby całkowite $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$ spełniają warunki

$$a_0 = a_{100} = 1 \quad \text{oraz} \quad a_n \cdot a_{n+2}^3 = a_{n+1}^3 \cdot a_{n+3} \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 97.$$

Udowodnij, że liczba a_2 jest siódmą potęgą liczby całkowitej.

26. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n spełniające równanie

$$3^n + 13 = 2^{n+3}.$$

27. Dany jest czworokąt wpisany w okrąg. Wykaż, że punkty przecięcia par dwusiecznych sąsiednich kątów wewnętrznych tego czworokąta leżą na dwóch prostych prostopadłych.

28. Udowodnij, że równanie

$$a_1^{42} + a_2^{42} + \ldots + a_{43}^{42} = 44b^{42}$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_{43}, b$.

29. Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *pechową*, jeżeli pewien ciąg jej kolejnych cyfr tworzy liczbę podzielną przez 13. *Pechowe* są na przykład liczby **26**, 1**13**7, 12**0**1 i **169**2.

Udowodnij, że dodatnich liczb całkowitych, które nie są *pechowe*, jest skończenie wiele.

30. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $AB < BC < CA$. Punkt O jest środkiem okręgu ω opisanego na trójkącie ABC, a punkt H ortocentrum tego trójkąta. Punkty E i F są odpowiednio środkami krótszych łuków CA i AB okręgu ω. Punkt X jest odbiciem punktu E względem prostej CA, punkt Y zaś jest odbiciem punktu F względem prostej AB. Wykaż, że jeżeli punkty A, X, Y są współliniowe, to punkty O, H, X, Y leżą na jednym okręgu.

31. Udowodnij, że równanie

$$a^{a^a} \cdot b^{b^b} = c^{c^c} \cdot d^{d^d}$$

nie ma rozwiązań w dodatnich liczbach całkowitych $a < c < d < b$.

32. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają nierówności

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \quad \text{oraz} \quad 2x + 3y + 6z \geqslant 7.$$

Udowodnij, że $7xy \geqslant z$.

33. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punktem styczności tego okręgu z bokiem AB jest punkt D, a punkt K jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że prosta KI przechodzi przez środek boku AB.