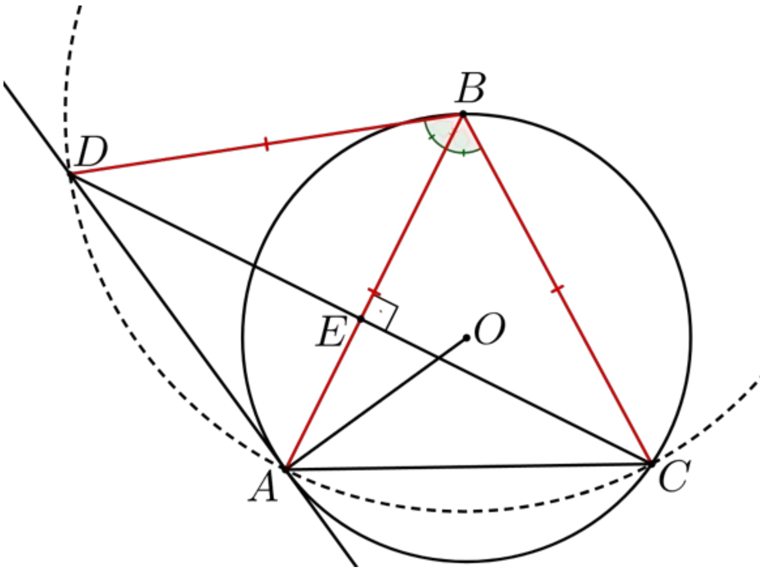
Facebookowe Kółko Olimpiady Matematycznej Juniorów

luty – marzec 2024



Wstęp

Facebookowe Kółko OMJ było inicjatywą, mającą na celu ułatwić przygotowanie do Olimpiady Matematycznej Juniorów. W jej ramach publikowaliśmy skrypty, które miały przybliżyć pewne zagadnienia teoretyczne, a przede wszystkim nauczyć stosować je w zadaniach. Zorganizowaliśmy także 6 konkursów treningowych, które formą odpowiadały zawodom 2 i 3 etapu olimpiady. Broszura jest opracowana na podstawie materiałów publikowanych na stronie Olimpiady na Facebooku. Chcielibyśmy bardzo serdecznie podziękować wszystkim, dzięki którym ta broszura mogła zostać przygotowana. Dziękujemy dr. Arkadiuszowi Męclowi, przewodniczącemu Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej Juniorów za możliwość działania pod szyldem Olimpiady oraz nieocenione rady. Chcielibyśmy również podziękować Łukaszowi Próchniakowi za pomoc w sprawdzaniu zadań.

Miłosz Płatek
Antoni Łuczak
Oleksii Iermolenko
Kordian Pisarek
Filip Manijak
Konstanty Smolira

Ranking Ligi Zadaniowej

1. Mariia Kulyk — 179 punktów
2. Julian Zbigniew Kuryłłowicz-Kaźmierczak — 158 punktów
3. Piotr Milewicz — 149 punktów
4. Aleksander Dembny — 147 punktów
5. Marek Konieczny — 144 punktów
6. Szymon Michalik — 137 punktów
7. Piotr Dybich — 119 punktów

Spis treści

Skrypty

I Facebookowe Kółko Olimpiady Matematycznej Juniorów

Metoda ekstremum

W zadaniach kombinatorycznych dobrym pomysłem może okazać się rozpatrzenie ekstremalnego elementu o określonych własnościach. Warto w szczególności rozważać:

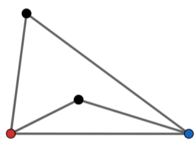
- minimalny element — np. wybór najkrótszego odcinka,
- maksymalny element — np. wybór trójkąta o największym polu.

Najczęściej stosujemy metodę ekstremum, gdy mamy do pokazania istnienie obiektu o pewnych własnościach.

Przykłady

Przykład 1. Na płaszczyźnie dane jest n punktów, z których każdy jest w jednym z trzech kolorów: czarny, czerwony, niebieski. Przy tym wiadomo, że istnieje punkt w każdym z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt o wierzchołkach różnokolorowych, wewnątrz którego nie znajduje się żaden inny pokolorowany punkt.

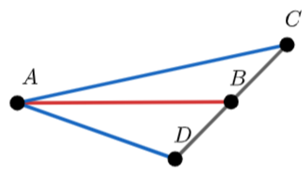
Rozwiązanie: Wybierzmy trójkąt o różnokolorowych wierzchołkach, który ma najmniejsze pole. Zauważmy, że jeśli istniałby pewien pokolorowany punkt wewnątrz wskazanego trójkąta, to moglibyśmy zamienić go z wierzchołkiem o odpowiadającym mu kolorze w wybranym przez nas trójkącie. Otrzymalibyśmy wówczas trójkąt o różnokolorowych wierzchołkach o mniejszym polu, co byłoby sprzeczne z naszym założeniem o minimalności pola wskazanego wcześniej trójkąta. Zatem w wybranym trójkącie nie znajduje się żaden pokolorowany punkt.



Przykład 2. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S. Każdy punkt z tego zbioru jest środkiem pewnego odcinka o końcach w punktach z S. Udowodnij, że S jest zbiorem nieskończonym.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że zbiór S ma skończoną liczbę elementów. Wybierzmy z tego zbioru takie dwa punkty A, B, że odcinek AB jest najdłuższy ze wszystkich odcinków o końcach w zbiorze S.

Oznaczmy przez CD odcinek którego środkiem jest punkt B. Następnie zauważmy, że $\sphericalangle DBA \geqslant 90^\circ$ lub $\sphericalangle CBA \geqslant 90^\circ$. Stąd $AD > AB$ lub $CA > AB$, gdyż naprzeciwko największego kąta w trójkącie znajduje się najdłuższy bok. Wnioskujemy stąd, że AB nie jest najdłuższym odcinkiem spośród wszystkich mających końce w punktach zbioru S, co jest sprzeczne z naszym początkowym przypuszczeniem Zatem zbiór S jest nieskończony.



Zadania

Zadanie 1. Na płaszczyźnie dane jest n punktów, z których każdy jest w jednym z trzech kolorów: czarny, czerwony, niebieski. Przy tym wiadomo, że istnieją co najmniej 3 punkty w każdym z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt o jednokolorowych wierzchołkach, wewnątrz którego znajdują się maksymalnie cztery pokolorowane punkty.

Zadanie 2. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano dodatnią liczbę całkowitą, przy czym każda wpisana liczba to średnia arytmetyczna czterech liczb wpisanych w pola z nią sąsiadujące. Udowodnij, że wszystkie wpisane liczby są równe.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie dane jest $n \geqslant 3$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieje taki wielokąt wypukły o wierzchołkach w zadanych punktach, że zawiera on wszystkie n danych punktów (wielokąt ten nazywany jest *otoczką wypukłą*).

Zadanie 4. W pewnej grupie 30 osób każda zna co najmniej 25 osób spośród pozostałych. Udowodnij, że można wybrać spośród członków tej grupy takie sześć osób, z których każde dwie się znają.

Zadanie 5. W zawodach szachowych wystartowało n osób. Wiemy, że każdy zawodnik zagrał z każdym innym co najwyżej jeden raz, przy czym nie było remisów. Ponadto wiemy, że nie można usadzić żadnych $k \geqslant 3$ zawodników przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem, siedzącym po jego prawej stronie. Udowodnij, że istnieje zawodnik, który przegrał wszystkie partie.

Zadanie 6. Na turnieju rycerskim każdy uczestnik posiada wśród pozostałych co najwyżej trzech śmiertelnych wrogów. Udowodnij, że można podzielić uczestników turnieju na dwie grupy tak, by dowolny uczestnik posiadał w swojej grupie co najwyżej jednego śmiertelnego wroga.

Uwaga: Jeżeli rycerz A jest śmiertelnym wrogiem rycerza B, to rycerz B jest śmiertelnym wrogiem rycerza A.

Zadanie 7. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S składający się z $n \geqslant 3$ punktów, które nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieje okrąg przechodzący przez pewne trzy punkty ze zbioru S, wewnątrz którego nie ma żadnych innych punktów ze zbioru S.

Zadanie 8. Na płaszczyźnie dane jest n punktów czarnych i n punktów białych, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Udowodnij, że punkty białe da się połączyć w pary z czarnymi punktami za pomocą czerwonych odcinków tak, że żadne dwa czerwone odcinki się nie przecinają.

Wstawianie między kwadraty

W niektórych zadaniach chcemy rozstrzygnąć, czy pewna liczba jest kwadratem liczby całkowitej. Pomocna jest następująca obserwacja.

- Jeżeli liczba n znajduje się pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych, to znaczy: dla pewnej liczby całkowitej a zachodzi nierówność

  $$a^2 < n < (a+1)^2,$$

  to liczba n nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Oto dwie wariacje na temat powyższego faktu.

- Dane są dodatnie liczby całkowite a, b. Jeżeli liczba n jest kwadratem liczby całkowitej oraz

  $$a^2 \leqslant n \leqslant (a+b)^2,$$

  to n jest kwadratem jednej z kolejnych liczb a, $a+1$, $\ldots$, $a+b$.
- Dana jest dodatnia liczba całkowita k. Jeżeli liczba n znajduje się pomiędzy k-tymi potęgami kolejnych liczb całkowitych, to znaczy: dla pewnej liczby całkowitej a zachodzi nierówność

  $$a^k < n < (a+1)^k,$$

  to n nie jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Przykłady

Przykład 1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Udowodnij, że liczba

$$n^2 + n + 1$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Stąd liczba $n^2 + n + 1$ znajduje się pomiędzy kwadratami kolejnych liczb całkowitych. Nie jest ona zatem kwadratem liczby całkowitej.

Przykład 2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Udowodnij, że liczba

$$n^3 + 3n$$

nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że na mocy wzoru na sześcian sumy zachodzą nierówności

$$n^3 < n^3 + 3n < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$$

W rezultacie rozważana liczba znajduje się pomiędzy dwoma kolejnymi sześcianami, czyli nie jest sześcianem liczby całkowitej.

Przykład 3. Wykaż, że nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^3 + 10n + 1$$

jest sześcianem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że rozumując podobnie jak w poprzednim przykładzie, zapisać można nierówności

$$n^3 < n^3 + 10n + 1 < n^3 + 6n^2 + 12n + 8 = (n+2)^3.$$

Zatem jedyną możliwością, aby rozważana liczba była sześcianem, jest:

$$n^3 + 10n + 1 = (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Redukując wyrazy po obydwu stronach powyższej równości, dostajemy warunek $3n^2 - 7n = 0$, który zapisać możemy w postaci

$$n(3n-7) = 0.$$

Skoro n jest liczbą dodatnią, to $3n = 7$, co nie jest możliwe, gdyż siedem nie jest wielokrotnością trójki. Zatem rozważana liczba nie jest ani sześcianem liczby $n+1$, ani żadnej innej liczby całkowitej.

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^2 + 4n + 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Udowodnij, że nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^2 + 9n + 20$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (X OMG, zawody III stopnia) Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$

są kwadratami liczb całkowitych. Wykaż, że $a = b$.

Zadanie 4. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, dla których liczby

$$x^2 + 4y \quad \text{oraz} \quad y^2 + 4x$$

są kwadratami liczb całkowitych.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie pary (x, y) dodatnich liczb całkowitych, dla których

$$x^2 = y^4 + y^2 + y + 1.$$

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba

$$n^4 + 2n^3 - 3$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 7. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczba całkowita $k > 1$. Udowodnij, że liczba

$$n^k + n + 1$$

nie jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

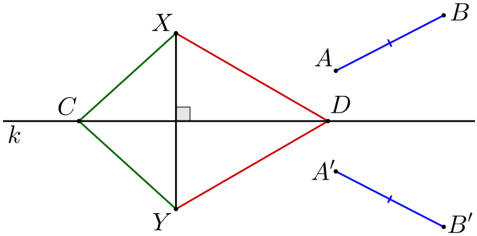
Zadanie 8. (LXIV OM, zawody III stopnia) Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych x, y, dla których

$$x^4 + y = x^3 + y^2.$$

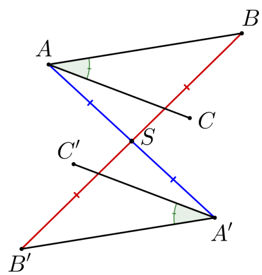
Odbicia

W zadaniach geometrycznych dobrym pomysłem okazuje się niekiedy odbicie symetryczne części lub całego rysunku. Na początek zapoznajmy się z dwoma najważniejszymi typami symetrii.

- Symetria osiowa — polega na odbiciu każdego punktu danej figury względem ustalonej prostej. Odbiciem punktu A względem prostej k nazywamy albo sam punkt A, jeśli A należy do prostej k, albo taki punkt A' różny od A, który leży na prostej prostopadłej do prostej k przechodzącej przez punkt A, dla którego odległość od prostej k jest równa odległości punktu A od tej prostej.
- Symetria środkowa — polega na odbiciu każdego punktu danej figury względem ustalonego punktu. Odbiciem punktu A względem punktu S nazywamy albo sam punkt A, jeśli $A = S$, albo taki punkt A' różny od punktu A, dla którego $AS = A'S$ oraz punkty A, A', S leżą na jednej prostej.



Rysunek 1. Symetria osiowa względem prostej k.



Rysunek 2. Symetria środkowa względem punktu S.

Znając definicje, możemy dostrzec wspólne własności obu rodzajów symetrii. Wśród nich szczególnie istotne są następujące dwie.

- Każdy punkt jest odbiciem swojego odbicia, czyli $(X')' = X$.
- Każda symetria zachowuje odległość, czyli jest tzw. *izometrią*, co oznacza, że długość odcinka o końcach w punktach A, B równa jest długości odcinka o końcach w punktach A', B'.

Dodatkowo symetria osiowa ma inną przydatną własność.

- Punkty X i Y są symetryczne względem prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwa różne punkty C, D na prostej k, takie że $XC = YC$ i $XD = YD$ (rys. 1).

Natomiast symetria środkowa posiada następującą dodatkową własność.

- Punkty A i A' oraz B i B' są symetryczne względem punktu S. Wówczas czworokąt $ABA'B'$ jest równoległobokiem, w którym punkt S jest punktem przecięcia przekątnych (rys. 2).

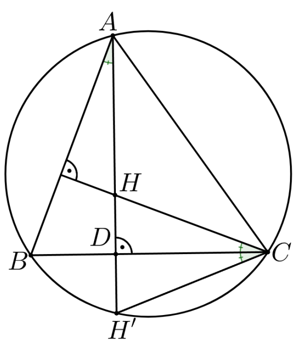
Przykłady

Przykład 1. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkt E jest punktem przecięcia prostej AD z okręgiem opisanym na trójkącie ABC, różnym od punktu A. Udowodnij, że $DE = DH$, gdzie H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC.

Rozwiązanie: Niech punkt H' będzie odbiciem punktu H względem prostej BC. Wykażemy, że $H' = E$. Punkt H' leży na prostej AD, gdyż jest ona prostopadła do prostej BC. Zauważmy też, że

$$\sphericalangle BCH' = \sphericalangle BCH = 90^\circ - \sphericalangle CBA = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAH',$$

więc skoro punkty A oraz C leżą po tej samej stronie prostej BH', to punkt H' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Oznacza to, że $H' = E$, zatem z własności symetrii $DE = DH$, co należało wykazać.



Przykład 2. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt F jest przecięciem prostej AO z okręgiem opisanym na ABC, różnym od punktu A . Punkt M jest środkiem boku BC. Wykaż, że

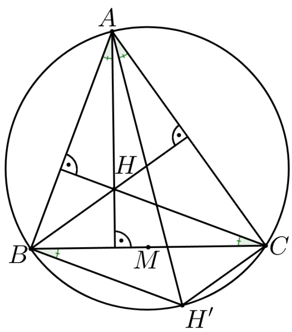
$$MF = MH,$$

gdzie H jest punktem przecięcia wysokości trójkąta ABC.

Rozwiązanie: Skoro punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to $AO = CO$. Stąd

$$\sphericalangle OAC = 90^\circ - \frac{\sphericalangle AOC}{2} = 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle HCB.$$

Odbijmy punkt H względem punktu M i oznaczmy odbicie jako H'.



Zauważmy, że

$$\sphericalangle BH'C = \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle BAC.$$

Skoro punkty A oraz H' leżą po przeciwnych stronach prostej BC, to H' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Zauważmy też, że

$$\sphericalangle H'BC = \sphericalangle HCB,$$

ponieważ punkty B i C są symetryczne względem punktu M. Skoro kąty oparte na łukach $H'C$ i FC okręgu opisanego na trójkącie ABC są równe, to $H' = F$, więc $HM = H'M = FM$, co należało wykazać.

Uwaga. W rozwiązaniu korzystaliśmy z twierdzenia o kącie wpisanym mówiącego, że miary kątów wpisanych opartych na równych łukach okręgu są równe. O fakcie tym mówimy więcej w piątym odcinku kółka.

Zadania

Zadanie 1. Dane są dwa kwadraty $ABCD$ i $DEFG$, które mają wspólny punkt D i poza nim nie mają żadnych innych punktów wspólnych. Punkt M jest środkiem odcinka CE. Udowodnij, że $DM = \frac{1}{2}AG$.

Zadanie 2. Punkt M jest środkiem boku AC trójkąta ABC. Na boku BC wybrano punkt D spełniający zależność

$$\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDM.$$

Udowodnij, że $AD = 2MD$.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a prosta k przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do prostej AO. Okrąg o środku w punkcie B i promieniu BC przecina prostą k w punkcie D, różnym od punktu A. Udowodnij, że prosta CD jest prostopadła do prostej AB.

Zadanie 4. (XIV OMJ, zawody I stopnia) Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P, że spełniona jest równość $AP = BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP. Wykaż, że $\sphericalangle BQD = 90^\circ$.

Zadanie 5. W czworokącie $ABCD$ zachodzi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Wykaż, że prosta CD jest prostopadła do prostej BE.

Zadanie 6. (X OMJ, zawody III stopnia) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku CD. Znając długości odcinków AD oraz BC, które wynoszą odpowiednio a oraz b, oblicz wartość wyrażenia

$$[ABM] - [DAM] - [BCM].$$

Uwaga: Przez $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

Zadanie 7. (XV OMJ, zawody II stopnia) Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.

Zadanie 8. W trójkącie ABC znajduje się punkt E spełniający zależność $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ECA$. Punkt D jest przecięciem prostych równoległych do odpowiednio prostych EB i EC przechodzących przez odpowiednio punkty C i B. Udowodnij, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAE$.

Wzory skróconego mnożenia

W wielu zadaniach olimpijskich przydatne jest zauważenie wzorów skróconego mnożenia. Celem jest przekształcenie danej równości lub nierówności do postaci, w której widoczny jest znany wzór. Poniżej przedstawiamy wzory najbardziej przydatne w rozwiązywaniu zadań:

- $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + ac + bc$,
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$,
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$,
- $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$,
- dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n:
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}),$$
w szczególności, dla $n = 3$:
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2),$$
- dla dowolnej nieparzystej liczby n:
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}),$$
w szczególności, dla $n = 3$:
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$
- tożsamość Sophie – Germain:
$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab).$$

Przykład 1. (XVI OMJ, zawody II stopnia) Liczby rzeczywiste a, b spełniają równość
$$a^2 + 2a = b^2 + 2b.$$
Udowodnij, że jeśli liczba a jest całkowita, to liczba b również jest całkowita.

Rozwiązanie: Dodajmy obustronnie liczbę 1. Otrzymujemy, że
$$a^2 + 2a + 1 = b^2 + 2b + 1.$$
Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat sumy, otrzymujemy, że
$$(a + 1)^2 = (b + 1)^2.$$
Oznacza to, że $|a + 1| = |b + 1|$, czyli
$$b + 1 = a + 1 \quad \text{lub} \quad b + 1 = -a - 1,$$
więc $b = a$ lub $b = -a - 2$. W obu przypadkach, jeśli liczba a jest całkowita, to liczba b również, co chcieliśmy wykazać.

Przykład 2. Udowodnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość $a + b + c = 0$, to zachodzi równość
$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$$

Rozwiązanie: Skoro $a + b + c = 0$, to $c = -(a + b)$. Stąd korzystając ze wzoru skróconego mnożenia na sześcian sumy otrzymujemy, że
$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= a^3 + b^3 + (-a - b)^3 \\ &= a^3 + b^3 - (a + b)^3 \\ &= a^3 + b^3 - (a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2) \\ &= -3a^2b - 3ab^2 \\ &= -3ab(a + b) \\ &= -3ab(-c) = 3abc, \end{aligned}$$
co chcieliśmy udowodnić.

Zadania

Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (a, b) spełniające $a^4 - b^4 = 65$.

Zadanie 2. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają $a^2 + b^2 = c^2$. Udowodnij, że liczba

$$\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. Liczba n jest liczbą naturalną. Udowodnij, że:

a) liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6,

b) liczba $n^4 - n^2$ jest podzielna przez 12.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające

$$(x-y+z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

Zadanie 5. Dla liczb całkowitych dodatnich a, b oraz n zachodzi równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2+n^2}{b^2+n^2}.$$

Udowodnij, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Zadanie 6. Liczby rzeczywiste x, y oraz z są różne od zera. Udowodnij, że jeśli spełniają one układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \\ z^2 + z = x^2 \end{cases}$$

to $(x-y)(y-z)(z-x) = 1$.

Zadanie 7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość:

$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2.$$

Udowodnij, że

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4.$$

Zadanie 8. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 + 4yz + z^2 = 1 \\ z^2 + 4zx + x^2 = -2 \end{cases}$$

Okręgi

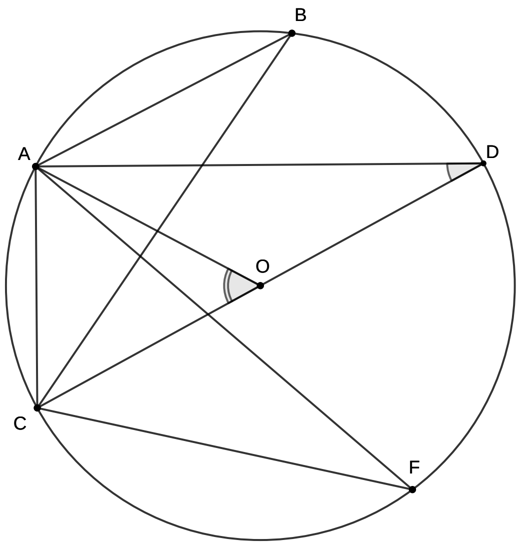
Tematem tego skryptu będą własności okręgów. Warto poznać kilka podstawowych faktów, które często są przydatne w zadaniach.

• Kąt środkowy — to kąt którego wierzchołkiem jest środek okręgu, a ramionami jego promienie (na przykład kąt AOC na rysunku).

• Łuk okręgu — część okręgu wyznaczona przez ramiona kąta środkowego. Każda para punktów na okręgu wyznacza dwa łuki.

• Cięciwa okręgu — odcinek łączący dwa punkty okręgu. Cięciwa wyznacza łuk okręgu złożony z takich punktów, że odcinki łączące te punkty ze środkiem okręgu przecinają tę cięciwę.

• Kąt wpisany — to kąt, który ma wierzchołek na okręgu, a jego ramionami są cięciwy okręgu (na przykład kąt ADC na rysunku).



• Własność 1 — jeżeli kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwukrotnością miary kąta wpisanego. W szczególności wynika z tego, że kąty wpisane oparte na średnicy mają miary 90°.

• Własność 2 — kąty wpisane są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są oparte na łukach tej samej długości.

• Własność 3 — kąty wpisane oparte na łukach równej długości mają równe miary. Cięciwy wyznaczające te łuki mają równe długości.

• Własność 4 — poniższe warunki są równoważne dla czworokąta wypukłego $ABCD$ (czyli takiego, którego kąty wewnętrzne są wypukłe):

a) istnieje okrąg przechodzący przez punkty A, B, C i D,

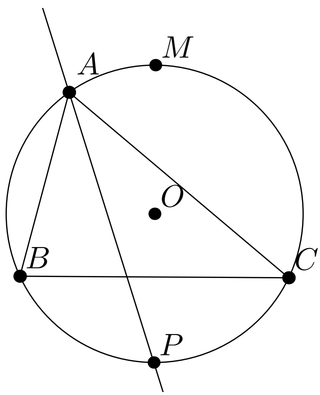
b) $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$,

c) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABD$.

Czworokąt mający powyższe własności nazywamy *wpisanym w okrąg.*

Przykłady

Przykład 1. Dany jest trójkąt ABC, w którym dwusieczna kąta BAC przecina okrąg opisany na ABC w punkcie P. Niech punkt M będzie środkiem łuku BC okręgu opisanego, leżącego po tej samej stronie prostej BC co punkt A. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że punkty P, M, O leżą na jednej prostej.

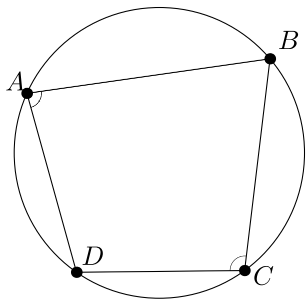


Rozwiązanie: Z definicji punktu M otrzymujemy, że leży on na symetralnej cięciwy BC. Skoro punkt O jest środkiem okręgu opisanego, to $BO = CO$. Z własności 2 dla kątów $\sphericalangle BAP$ i $\sphericalangle CAP$ wnioskujemy, że łuki BP i CP są równej długości. Z własności 3 uzyskujemy zatem, że $BP = CP$. Szukaną prostą jest zatem symetralna odcinka BC.

Uwaga. Warto zapamiętać powyższą konfigurację, gdyż środki łuków często pojawiają się w zadaniach olimpijskich.

Przykład 2. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Udowodnij, że proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $BC = DA$.

Rozwiązanie: Proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$, co jest równoważne z tym, że cięciwy BC i DA mają równe długości. Zatem proste AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $BC = DA$, co chcieliśmy udowodnić.



Uwaga. Powyższy rezultat oznacza, iż trapez wpisany w okrąg jest zawsze równoramienny. Stwierdzenie odwrotne też jest prawdą — na każdym trapezie równoramiennym można opisać okrąg (dlaczego?).

Zadania

Zadanie 1. Trapez $ABCD$ wpisany w okrąg ω ma podstawy AB i CD. Na okręgu ω wybrano punkty P i Q tak, by punkty A, P, Q, B, C i D leżały w tej właśnie kolejności na okręgu ω. Odcinki PC i QA przecinają się w punkcie X, a odcinki PB i OD przecinają się w punkcie Y. Udowodnij, że na czworokącie $PQXY$ można opisać okrąg.

Zadanie 2. W trójkącie równoramiennym ABC kąty wewnętrzne przy podstawie AB mają miary 40°. Dwusieczna kąta CBA przecina prostą AC w punkcie D. Udowodnij, że $BD + CD = AB$.

Zadanie 3. Kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$ spełniają warunek $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Udowodnij, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$.

Zadanie 4. Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC. Półproste BD i BE dzielą kąt ABC na trzy równe części. Okrąg przechodzący przez punkt B przecina półproste BA, BC, BD i BE odpowiednio w punktach K, L, M i N. Udowodnij, że punkty K, L, M i N są wierzchołkami trapezu.

Zadanie 5. W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A_1, B_1 i C_1. Odcinki AI, BI i CI przecinają okrąg wpisany odpowiednio w punktach A_2, B_2 i C_2. Udowodnij, że proste A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie 6. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniona jest równość $AB = BD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano taki punkt E, że $CE = CD$, przy czym punkty E, C, A leżą w tej kolejności na prostej AC. Udowodnij, że $BE = BD$.

Zadanie 7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, przy czym prosta AB jest równoległa do prostej DE oraz prosta BC jest równoległa do prostej EF. Udowodnij, że prosta CD jest równoległa do prostej AF.

Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkty E i F leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC i spełniają warunki $BF = BC$ oraz $AE = AC$, przy czym zakładamy, że punkty E i B są różne oraz punkty F i C są różne. Punkt G jest punktem przecięcia odcinków EF i AB. Udowodnij, że $\sphericalangle BCG = \sphericalangle ACG$.

Liczby pierwsze

Liczba pierwsza to taka dodatnia liczba całkowita, która ma dokładnie dwa różne dzielniki dodatnie — 1 i samą siebie. Okazuje się, że każdą liczbę całkowitą dodatnią można przedstawić jako iloczyn liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Przyjmujemy przy tym, że liczba 1 jest iloczynem zerowej liczby czynników pierwszych.

Co więcej, powyższy rozkład jest jednoznaczny dla danej liczby, z dokładnością do kolejności czynników. Innymi słowy, jeśli dane jest s liczb pierwszych $p_1, \ldots, p_s$ oraz k liczb pierwszych $q_1, \ldots, q_k$ spełniających warunek

$$p_1 \cdot \ldots \cdot p_s = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k,$$

to $s = k$ oraz liczby p_i są po zmianie kolejności równe liczbom q_i.

Dla każdej liczby pierwszej p oraz dodatniej liczby całkowitej n istnieje taka nieujemna liczba całkowita k, że liczba p^k jest dzielnikiem liczby n, natomiast liczba p^{k+1} nie jest dzielnikiem liczby n. Liczbę k nazywamy *krotnością p* w rozkładzie liczby n na czynniki (lub *wykładnikiem p-adycznym n*). Dla przykładu, krotność liczby 3 w rozkładzie liczby 54 na czynniki równa jest 3, ponieważ $54 = 2^1 \cdot 3^3$. W świetle przyjętej konwencji, krotność dowolnej liczby pierwszej w rozkładzie liczby 1 równa jest 0.

Z rozkładem na czynniki pierwsze związane są następujące własności.

(i) Iloczyn liczb całkowitych jest podzielny przez liczbę pierwszą p wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z nich jest podzielna przez p.

(ii) Jeżeli dodatnia liczba całkowita jest podzielna przez różne liczby pierwsze $p_1, p_2, \ldots, p_m$, to jest także podzielna przez ich iloczyn.

(iii) Jeśli liczby a, b są krotnościami liczby pierwszej p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb n, m, to krotność liczby p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n \cdot m$ równa jest $a + b$.

(iv) Liczba całkowita dodatnia n jest a–tą potęgą liczby całkowitej wtedy i tylko wtedy, gdy każda liczba pierwsza występuje w rozkładzie n na czynniki pierwsze w krotności podzielnej przez a.

Przykład 1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą n większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej oraz złożonej.

Rozwiązanie: Chcemy uzyskać $n = p + m$, gdzie p jest liczbą pierwszą, a m liczbą złożoną. Na początku weźmy $p = 2$. Jeżeli liczba n jest parzysta, to wtedy liczba $m = n-2$ też, jako różnica dwóch liczb parzystych. Jednak skoro $n > 5$, to $m > 3$. Skoro wszystkie liczby parzyste większe od 2 są złożone, to otrzymaliśmy oczekiwane przedstawienie. Pozostaje nam przypadek, gdy liczba n jest nieparzysta. Weźmy tym razem $p = 3$. Wówczas liczba $m = n-3$ jest parzysta, jako różnica liczb nieparzystych. Skoro $n > 5$, to $m > 2$, i podobnie jak wcześniej wnioskujemy stąd, że m jest liczbą złożoną. Zatem szukane przedstawienie istnieje zarówno gdy liczba n jest parzysta, jak i gdy jest nieparzysta.

Przykład 2. Iloczyn dwóch dodatnich liczb całkowitych a, b jest szóstą potęgą liczby całkowitej. Wiadomo również, że liczba a jest kwadratem, a liczba b jest sześcianem liczby całkowitej. Wykazać, że liczby a i b są też szóstymi potęgami liczb całkowitych.

Rozwiązanie: W rozumowaniu korzystamy wielokrotnie z własności (iii) oraz (iv). Niech $a = x^2$, $b = y^3$ oraz $a \cdot b = z^6$. Rozważmy dowolną liczbę pierwszą p. Oznaczmy krotności liczby p w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb x, y, z odpowiednio jako n, m, k. W rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x^2 liczba p występuje dwa razy więcej razy niż w rozkładzie liczby x, czyli $2n$ razy. Analogiczni stwierdzamy, że krotności liczby p w rozkładach liczb y^3 i z^6 równe są odpowiednio $3m$ oraz $6k$. W rezultacie, rozpatrując krotności liczby p w rozkładzie na czynniki pierwsze obu stron równania $x^2y^3 = z^6$, dostaniemy warunek

$$2n + 3m = 6k.$$

Zatem $2n = 6k - 3m$, więc liczba $2n$ jest podzielna przez 3; a także przez 6. Analogicznie uzasadniamy, że liczba $3m$ jest podzielna przez 6. Jednak liczby $2n$ i $3m$ to krotności wystąpień liczby p w rozkładach na czynniki pierwsze odpowiednio liczb a i b. Skoro każda liczba pierwsza p występuje w rozkładach tych liczb z krotnością podzielną przez 6, to liczby te są szóstymi potęgami liczb całkowitych, co kończy dowód.

Przykład 3. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^2 + q^2$ nie jest podzielna przez liczbę $p + q$.

Rozwiązanie: Rozumujemy nie wprost. Przypuśćmy, wbrew tezie, że liczba p^2+q^2 jest podzielna przez liczbę $p+q$. Wtedy $p^2+q^2 = k(p+q)$, dla pewnej liczby całkowitej k. Przekształćmy to równanie do postaci iloczynowej, uzyskując kolejne postaci równoważne:

$$\begin{aligned} (p^2 + q^2 + 2pq) - 2pq &= k(p + q), \\ (p + q)^2 - 2pq &= k(p + q), \\ (p + q)(p + q) - k(p + q) &= 2pq, \\ (p + q)(p + q - k) &= 2pq. \end{aligned}$$

Skoro prawa strona równania jest podzielna przez liczbę p, to lewa również. Gdyby liczba $p + q$ była podzielna przez liczbę p, to liczba $q = (p + q) - p$ byłaby również podzielna przez liczbę p, gdyż różnica dwóch wielokrotności danej liczby też jest jej wielokrotnością. To jest niemożliwe, ponieważ wiemy, że jedynymi dodatnimi dzielnikami liczby q są 1 oraz q, a liczba p nie może być żadną z tych liczb. Stad liczba p nie dzieli liczby $p + q$.

Skoro liczba p dzieli lewą stronę równania, to musi dzielić liczbę $p + q$ lub liczbę $p+q-k$. Jednak liczba $p+q$ nie jest podzielna przez liczbę p, zatem liczba $p+q-k$ musi być podzielna przez liczbę p. Rozumowanie to możemy również przeprowadzić analogicznie dla liczby q uzasadniając, że dzieli ona liczbę $p+q-k$. Wobec tego liczba $p+q-k$ jest podzielna przez liczbę p i liczbę q, zatem jest też podzielna przez liczbę pq, na mocy własności (ii). Możemy wówczas zapisać

$$p + q - k = lpq,$$

gdzie l jest liczbą całkowitą. Skoro liczby $2pq$ i $p+q$ są liczbami dodatnimi, to liczba $p + q - k = lpq$ również, a zatem $l > 0$. Otrzymujemy, że

$$(p + q) \cdot lpq = 2pq,$$

$$p + q = \frac{2}{l} \leqslant 2.$$

Jednak $p + q \geqslant 2 + 3 = 5 > 2$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadania

Zadanie 1. Udowodnij, że sumę dwóch kolejnych liczb pierwszych większych od 2 zawsze można przedstawić w postaci iloczynu trzech liczb całkowitych większych od 1.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy równanie $200^a \cdot 10^b = 20^c$ ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.

Zadanie 3. Znajdź co najmniej jedną taką parę (a, b) liczb całkowitych dodatnich, spełniającą warunek $3a^4 = 7b^3$.

Zadanie 4. Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest jednocześnie iloczynem czterech liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Jakie to liczby?

Zadanie 5. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że cztery ostatnie cyfry każdej z liczb ab, bc, ca to 2024? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $13p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej dodatniej.

Zadanie 7. Wykaż, że jeżeli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to liczba $p^3 + q^3$ nie może być podzielna przez liczbę $p^2 + q^2$.

Zadanie 8. Rozwiąż w liczbach pierwszych p, q, r równanie

$$pr(p - 4) = q(2r - 2p - q)$$

Konkursy

I Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

3 – 4 lutego 2024 r.

1. Liczby całkowite a oraz b spełniają warunek $a - b = 1$. Udowodnij, że liczba
$$\frac{4a^3 - 4b^3 - 1}{3}$$
jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów $A_1, A_2 \ldots A_n$. Udowodnij, że można wybrać takie dwa różne punkty A_k oraz A_l, że dla każdego innego punktu A_i kąty $\sphericalangle A_iA_kA_l$ oraz $\sphericalangle A_iA_lA_k$ są ostre.

3. Znajdź największą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że liczba $n^3 + 100$ jest podzielna przez liczbę $n + 10$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Punkt T leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia warunki
$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle CTA = 120^\circ.$$
Punkty X i Y są odpowiednio środkami odcinków AB i AC. Udowodnij, że punkty A, Y, T, X leżą na jednym okręgu.

5. Na płaszczyźnie dane jest n punktów. Każde trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym od 1. Udowodnij, że istnieje trójkąt o polu nie większym od 4, na zewnątrz którego nie znajduje się żaden z danych punktów.

II Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

10 – 11 lutego 2024 r.

1. Dane są liczby niewymierne x, y. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita a, że liczba $ax + y$ również jest niewymierna.

2. Punkty K, L są środkami odpowiednio boków AC, AB trójkąta ABC. Proste BK, CL przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że jeśli $AG = BC$, to $\sphericalangle BGC = 90°$.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite x, y, że liczba

$$k = \frac{x^2 + 3x + 1}{y^2}$$

jest całkowita. Udowodnij, że $k \geqslant 3$.

4. Na tablicy napisano 16 parami różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 50. Udowodnij, że na tablicy są takie cztery parami różne liczby a, b, c, d, że $a + b = c + d$.

5. Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, że dla dowolnej liczby całkowitej x, liczba

$$x^2 + 2kx + 1$$

jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.

III Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

17 – 18 lutego 2024 r.

1. W grupie 24 uczniów każdy wysłał kartkę walentynkową dokładnie 12 innym uczniom. Udowodnij, że istnieje para uczniów A, B, którzy wysłali sobie nawzajem kartki, to znaczy: uczeń A wysłał kartkę uczniowi B i uczeń B wysłał kartkę uczniowi A.

2. W trójkącie ABC punkty M i N to środki odpowiednio boków AB i BC. Punkt P jest środkiem odcinka AM. Udowodnij, że prosta CM połowi odcinek PN (połowi, czyli przecina odcinek w jego środku).

3. Czy istnieje taka liczba całkowita a, że suma cyfr a^{2024} wynosi 2024? Odpowiedź uzasadnij.

4. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AC. Na prostej BM wybrano punkt N spełniający warunek $AN = BC$, przy czym punkty B, N, M leżą na tej prostej właśnie w tej kolejności. Punkt K stanowi przecięcie prostej AN i odcinka BC. Udowodnij, że $BK = KN$.

5. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y), dla których

$$\begin{cases} x + y \neq 0, \\ \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = 6. \end{cases}$$

IV Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

24 – 25 lutego 2024 r.

1. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie:

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y.$$

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że zapis dziesiętny liczby

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a)$$

kończy się cyframi „10”.

3. Marek gra ze swoim kolegą w grę, w której obaj wykonują na zmianę ruchy. Na początku na stole leżą 43 karty. Ruch polega na zdjęciu ze stołu jednej, dwóch, trzech, lub czterech kart. Wygrywa ten z graczy, który zdejmie ostatnią kartę. Wiedząc, że grę rozpoczyna Marek, rozstrzygnij, który z graczy będzie mógł wygrać niezależnie od tego, jakie ruchy zrobi jego przeciwnik.

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych, które spełniają poniższy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt P leży na odcinku AB, a punkty S_1 i S_2 są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach APC i BPC. Wykaż, że środek odcinka S_1S_2 leży na symetralnej odcinka CM.

V Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

2 – 3 marca 2024 r.

1. Rozstrzygnij, czy równanie $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 = 7^{2024}$ ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d.

2. Dana jest liczba całkowita N. Jeżeli liczba ta jest podzielna przez 5, to Maciek dzieli ją przez 5, w przeciwnym wypadku dodaje do niej 3. Maciek powtarza tę operację, dopóki nie otrzyma liczby 1. Rozstrzygnij, dla jakich liczb N Maciek nigdy nie uzyska liczby 1.

3. Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający $AB = BC = CD$. Wiadomo też, że $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ i $\sphericalangle BCD = 150^\circ$. Znajdź miary pozostałych dwóch kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

4. Dany jest okrąg ω oraz jego cięciwa AB, niebędąca jego średnicą. Wybieramy punkt C na dłuższym łuku AB tego okręgu. Symetralna odcinka BC przecina okrąg w dwóch różnych punktach X i Y. Niech P oraz Q będą takimi punktami na prostej AC, że proste PX oraz QY są prostopadłe do prostej AC. Wykaż, że długość odcinka PQ zależy tylko od długości odcinka AB.

5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca zarówno a i b. Dla jakich liczb całkowitych n wartość wyrażenia

$$\frac{a^2 + ab + bc + an}{a + b}$$

jest liczbą całkowitą?

VI Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

9 – 10 marca 2024 r.

1. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p i q, dla których

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

2. Bartek rozstawił 777 białych króli na szachownicy rozmiaru 999×999 (przy czym na jednym polu może być co najwyżej jeden król) tak, że żaden król nie stoi na brzegu szachownicy ani w jej rogu. Wykaż, że Bartek ma teraz parzyście wiele możliwości na zrobienie jednego ruchu jednym z 777 rozstawionych króli.

Uwaga: Król szachowy jest taką figurą, która ze swojego pola może się ruszyć na każde pole, które ma z tym (wyjściowym) polem wspólną krawędź lub róg.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, gdzie $AB < AD$. Niech E będzie takim punktem na prostej BC, różnym od punktu B, że $CE = BC$. Niech F będzie takim punktem na prostej AD, że $DF = DC$, przy czym zakładamy, że punkt F nie leży na odcinku AD. Wreszcie, niech G będzie takim punktem na prostej EF, że $\sphericalangle GBA = \sphericalangle GBC$, przy czym zakładamy, że punkt G leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ABC$. Wykaż, że środek odcinka BG leży na prostej AD.

4. Rozwiąż równanie

$$2(q^2 - p^2)(q^2 - r^2) = 27pqr$$

wiedząc, że p, q, r są liczbami pierwszymi.

5. Danych jest 100 dodatnich liczb całkowitych nie większych niż 100, których suma wynosi 200. Udowodnij, że można tak wybrać pewne spośród tych liczb, aby ich suma była równa 100.

Podpowiedzi do zadań

I Facebookowe Kółko Olimpiady Matematycznej Juniorów

1. Przeprowadź rozumowanie analogicznie jak w Przykładzie 1.

2. Rozpatrz to pole, któremu przypisano najmniejszą liczbę.

3. Rozpatrz wielokąt o największym polu.

4. Rozpatrz najliczniejszą z takich grup osób, gdzie wszyscy się znają.

5. Rozpatrz najdłuższy ciąg zawodników $A_1, A_2, .., A_l$ taki, że każdy zawodnik A_i wygrał z zawodnikiem A_{i+1}.

6. Rozpatrz podział, w którym jest najmniejsza liczba konfliktów.

7. Rozpatrz takie punkty A, B ze zbioru S, że wszystkie pozostałe punkty ze zbioru znajdują się po jednej stronie prostej AB (nietrudno udowodnić, że taka para istnieje — jest to prawda na przykład na mocy zadania trzeciego, gdzie prostą tą jest bok wielokąta). Wykaż, że pewien okrąg przechodzący przez te punkty spełnia warunki zadania.

8. Rozpatrz takie połączenie punktów czarnych i punktów białych w pary, aby suma długości wszystkich czerwonych odcinków była możliwie najmniejsza.

1. Wykaż, że rozważana liczba jest pomiędzy liczbami $(n+1)^2$ oraz $(n+2)^2$.

2. Wykaż, że liczba $n^2+9n+20$ jest pomiędzy liczbami $(n+4)^2$ oraz $(n+5)^2$.

3. Przyjmij, bez straty ogólności, że $a \geqslant b$. Wykaż, że jeśli $a \neq b$, to liczba a^2+2b+1 jest pomiędzy kwadratami kolejnych liczb całkowitych.

4. Przypuśćmy nie wprost, że takie liczby istnieją. Bez straty ogólności niech $x \geqslant y$. Spróbuj umieścić x^2+4y pomiędzy pewnymi kwadratami liczb całkowitych.

5. Zauważ, że $y^4+y^2+y+1 \leqslant (y^2+1)^2$.

6. Zauważ, że $n^4+2n^3-3 < (n^2+n)^2$.

7. Wykaż nierówność $(n+1)^k - n^k > n+1$.

8. Pomnóż obie strony równania przez 4 i spróbuj sprowadzić wyrazy zawierające niewiadomą y do postaci kwadratu. Być może warto rozważyć, jakie wyrażenie można dodać lub odjąć od obu stron równania?

1. Odbij punkt D względem punktu M.

2. Odbij punkt D względem punktu M.

3. Udowodnij, że $AM = AC$.

4. Odbij punkt B względem punktu Q.

5. Odbij środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$ względem środka odcinka CD.

6. Odbij punkt B względem punktu M.

7. Odbij punkty D oraz C względem punktu E.

8. Odbij punkt E względem środków pozostałych boków.

1. Zastosuj dwukrotnie wzór na różnicę kwadratów. Spróbuj zapisać liczbę 65 jako iloczyn.

2. Rozważ liczbę $2(c-a)(c-b)$. Przekształć ją, a następnie zastosuj jeden ze wzorów wymienionych w skrypcie.

3. Zapisz obie liczby w postaci iloczynu. Zauważ, że wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych jest liczba podzielna przez 2, wśród trzech kolejnych liczb całkowitych jest liczba podzielna przez 3, itd.

4. Korzystając z wzorów skróconego mnożenia, doprowadź równanie do iloczynu przyrównanego do zera.

5. Równość ułamków implikuje, że istnieje taka liczba rzeczywista r, że $ar = a^2 + n^2$, oraz $br = b^2 + n^2$. Przekształć równanie, a następnie zastosuj jeden ze wzorów wymienionych w skrypcie.

6. Przekształć równania tak, by skorzystać ze wzoru ze skryptu. Warto dodać wszystkie równania stronami.

7. Zauważ, że pierwsze równanie implikuje $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$. Drugie równanie można sprowadzić do iloczynu liczb tej postaci.

8. Porównaj stronami pierwsze i drugie równanie. Dodaj wszystkie równania stronami, a następnie zastosuj jeden ze wzorów wymienionych w skrypcie.

1. Skorzystaj z Przykładu 2.

2. Opisz okrąg na trójkącie BCD. W jakim punkcie przecina on odcinek AB?

3. Skorzystaj z Własności 1 i Własności 4.

4. Skorzystaj z Przykładu 2.

5. Zauważ, że proste AI, BI, CI, to symetralne odpowiednio odcinków C_1B_1, A_1C_1, B_1A_1.

6. Zauważ, że teza jest równoważna temu, że punkt B to środek okręgu opisanego na trójkącie ADE. Czym staje się wobec tego $\sphericalangle ABD$?

7. Skorzystaj z Przykładu 2.

8. Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej (spróbuj je też uzasadnić):

Jeśli w trójkącie ABC dwusieczna kąta BAC przecina prostą BC w punkcie P, to:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}.$$

1. Jaka jest parzystość sumy?

2. Rozważ rozkład na czynniki pierwsze.

3. Rozważ krotności, z jakimi trójka oraz siódemka występują w rozkładzie na czynniki pierwsze obydwu stron.

4. Wśród dwóch kolejnych liczb całkowitych jedna jest podzielna przez 2. Co jeszcze możesz zauważyć?

5. Rozważ krotność dwójki w rozkładzie na czynniki pierwsze.

6. Jeżeli $13p + 1 = n^3$, to $13p = n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$.

7. Skorzystaj z formuły $p^3 + q^3 = (p^2 + q^2)(p + q) - p^2 q - pq^2$.

8. Dodaj do obydwu stron liczbę $4pr$.

Rozwiązania zadań ze skryptów

I Facebookowe Kółko Olimpiady Matematycznej Juniorów

Zadanie 1. Na płaszczyźnie dane jest n punktów, z których każdy jest w jednym z trzech kolorów: czarny, czerwony, niebieski. Przy tym wiadomo, że istnieją co najmniej 3 punkty w każdym z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt o jednokolorowych wierzchołkach, wewnątrz którego znajdują się maksymalnie cztery pokolorowane punkty.

Rozwiązanie: Trójkąt o wierzchołkach pomalowanych na ten sam kolor nazywać będziemy jednokolorowym. Rozważmy jednokolorowy trójkąt o najmniejszym możliwym polu. Bez straty ogólności przyjmijmy, że jego wierzchołki są czarne. Zauważmy, że gdyby we wnętrzu tego trójkąta znajdował się czarny punkt, to punkt ten wraz z dwoma wierzchołkami wybranego trójkąta tworzyłby jednokolorowy trójkąt o mniejszym polu, co jest sprzeczne z naszym założeniem o minimalności pola. Gdyby natomiast istniały wewnątrz tego trójkąta 3 czerwone lub 3 niebieskie punkty, to ponownie tworzyłyby one jednokolorowy trójkąt o mniejszym polu. Zatem wewnątrz rozważanego trójkąta znajdują się co najwyżej 2 czerwone i 2 niebieskie punkty, co kończy rozwiązanie.

Zadanie 2. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano dodatnią liczbę całkowitą, przy czym każda wpisana liczba to średnia arytmetyczna czterech liczb wpisanych w pola z nią sąsiadujące. Udowodnij, że wszystkie wpisane liczby są równe.

Rozwiązanie: Rozpatrzmy pole szachownicy, w które wpisano najmniejszą liczbę (jeżeli jest wiele takich pól — rozpatrujemy dowolne spośród nich). Oznaczmy wpisaną w to pole liczbę przez a, natomiast liczby wpisane w pola sąsiadujące z rozpatrywanym polem —przez b, c, d, e. Zgodnie z wyborem liczby a:

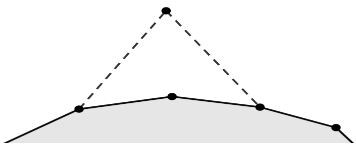
$$b \geqslant a \quad c \geqslant a \quad d \geqslant a \quad e \geqslant a.$$

Na mocy założenia z treści zadania mamy $4a = b + c + d + e$, co w połączeniu z powyższymi nierównościami oznacza, że $b = a$, $c = a$, $d = a$ oraz $e = a$. Rzeczywiście, gdyby któraś z liczb b, c, d, e była większa od liczby a, to ich suma byłaby większa od liczby $4a$.

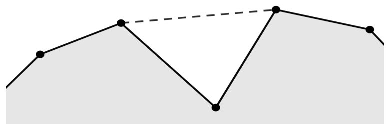
Uzasadniliśmy, że w pola sąsiadujące z rozważanym polem wpisana jest liczba a. Stąd wnioskujemy, że jeśli w dowolne pole wpisana jest liczba a, to jest ona także wpisana w sąsiednie pola. Skoro pomiędzy dowolnymi dwoma polami szachownicy można przejść za pomocą skończenie wielu kroków polegających na przejściu na sąsiednie pole, to we wszystkie pola szachownicy wpisana jest liczba a.

Zadanie 3. Na płaszczyźnie dane jest $n \geqslant 3$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieje taki wielokąt wypukły o wierzchołkach w zadanych punktach, że zawiera on wszystkie n danych punktów (wielokąt ten nazywany jest *otoczką wypukłą*).

Rozwiązanie: Spośród wielokątów o wierzchołkach w danych n punktach wybierzmy wielokąt o największym polu. Zauważmy, że żaden z n punktów nie może leżeć poza wybranym wielokątem, ponieważ w przeciwnym wypadku moglibyśmy powiększyć pole tego wielokąta. Ponadto, gdyby wybrany wielokąt był wklęsły, to moglibyśmy zwiększyć jego pole poprzez usunięcie wierzchołka przy wklęsłym kącie i połączeniu dwóch wierzchołków z którymi łączył się ten usunięty wierzchołek. Zatem wybrany wielokąt jest szukanym wielokątem z zadania.



Rysunek 1. Zwiększanie pola wielokąta, jeśli nie zawiera jednego z n punktów.



Rysunek 2. Zwiększanie pola wielokąta, jeśli nie jest on wypukły.

Zadanie 4. W pewnej grupie 30 osób każda zna co najmniej 25 osób spośród pozostałych. Udowodnij, że można wybrać spośród członków tej grupy takie sześć osób, z których każde dwie się znają.

Rozwiązanie: Przypuśćmy nie wprost, że nie istnieje szukana grupa sześciu osób. Rozpatrzmy najliczniejszą możliwą grupę osób w której wszyscy się znają (jeżeli jest wiele grup o takiej liczbie osób, to weźmy dowolną). Oznaczmy tę grupę przez S i załóżmy, że zawiera ona k osób ($k \leqslant 5$).

Zauważmy, że każda z $30-k$ osób nienależących do S nie zna przynajmniej jednej osoby z tej grupy. W przeciwnym wypadku moglibyśmy powiększyć naszą grupę o tę osobę i dostać większą grupę, w której wszyscy się znają, co przeczy wyborowi S.

Twierdzimy, że co najmniej jedna z k osób należących do S nie zna co najmniej 5 osób. W przeciwnym wypadku osoby z S nie znałyby łącznie (gdyby dodać wszystkie nieznajomości) jedynie $4 \cdot k$ osób, co jest niemożliwe, ponieważ osoby z S nie znają jedynie osób spoza S. Gdyby tych ostatnich było łącznie nie więcej niż $4k$, to nie stanowiliby, łącznie z k osobami z grupy S, grupy 30 osób, skoro zakładamy $k \leqslant 5$.

Z drugiej strony istnienie w grupie S osoby z co najmniej 5 nieznajomościami również prowadzi do sprzeczności, ponieważ osoba taka znałaby co najwyżej 24 osoby. To jest sprzeczne z założeniami zadania, według których każdy zna co najmniej 25 osób. Wnioskujemy stąd, że początkowe przypuszczenie, że $k \leqslant 5$ nie jest prawdziwe. W rezultacie istnieje grupa sześciu osób, z których każde dwie się znają.

Zadanie 5. W zawodach szachowych wystartowało n osób. Wiemy, że każdy zawodnik zagrał z każdym innym co najwyżej jeden raz, przy czym nie było remisów. Ponadto wiemy, że nie można usadzić żadnych $k \geqslant 3$ zawodników przy okrągłym stole tak, by każdy wygrał ze swoim sąsiadem, siedzącym po jego prawej stronie. Udowodnij, że istnieje zawodnik, który przegrał wszystkie partie.

Rozwiązanie: Rozpatrzmy najdłuższą kolejkę różnych zawodników postaci $A_1, A_2, .., A_l$ (zawodnik A_1 stoi na końcu, a A_l na czele) taką, że każdy z zawodników z kolejki wygrał z osobą stojącą przed nim.

Gdyby stojący na czele zawodnik A_l wygrał z którymś zawodnikiem stojącym za nim, to byłoby to sprzeczne z założeniami zadania, gdyż moglibyśmy tak ustawionych $k \geqslant 3$ graczy usadzić przy stole w zakazany sposób (zgodnie z porządkiem w kolejce).

Skoro rozważanej kolejki nie możemy już przedłużyć, to zawodnik A_l nie mógł wygrać z żadnym innym graczem — także spoza kolejki. Łącząc te dwie obserwacje dochodzimy do wniosku, że zawodnik A_l nie wygrał żadnej partii, co dowodzi prawdziwości tezy.

Zadanie 6. Na turnieju rycerskim każdy uczestnik posiada wśród pozostałych co najwyżej trzech śmiertelnych wrogów. Udowodnij, że można podzielić uczestników turnieju na dwie grupy tak, by dowolny uczestnik posiadał w swojej grupie co najwyżej jednego śmiertelnego wroga.

Uwaga: Jeżeli rycerz A jest śmiertelnym wrogiem rycerza B, to rycerz B jest śmiertelnym wrogiem rycerza A.

Rozwiązanie: Gdy dokonujemy pewnego podziału rycerzy na dwie grupy, to każdej z tych grup możemy przypisać łączną liczbę konfliktów, która w nich zachodzi, czyli liczbę par rycerzy, którzy są w tej grupie śmiertelnymi wrogami. Nazwijmy te liczby k_1 i k_2 i rozważmy liczbę $k = k_1 + k_2$.

Rozpatrzmy taki podział uczestników turnieju na dwie grupy, w którym liczba k jest minimalna możliwa (podziałów jest skończenie wiele, a każdemu odpowiada liczba k określona wyżej, więc istnieje taki, gdzie k jest minimalne). Twierdzimy, że każdy taki podział spełnia tezę.

Gdyby istniał rycerz, który po tak dokonanym podziale posiada dwóch śmiertelnych wrogów w swojej grupie, to moglibyśmy go przenieść do drugiej grupy, jednocześnie zmniejszając łączną liczbę konfliktów. W tej drugiej grupie miałby bowiem co najwyżej jednego śmiertelnego wroga (łącznie ma ich co najwyżej trzech). Byłoby to jednak sprzeczne z założeniem o minimalności łącznej liczby konfliktów, determinującym dokonany podział. Zatem przy dokonanym podziale każdy rycerz ma w swojej grupie maksymalnie jednego śmiertelnego wroga.

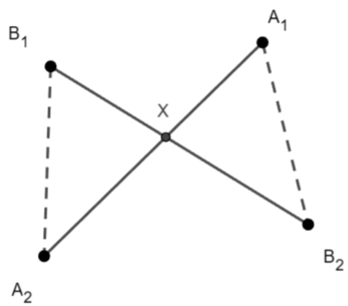
Zadanie 7. Na płaszczyźnie dany jest zbiór S składający się z $n \geqslant 3$ punktów, które nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że istnieje okrąg przechodzący przez pewne trzy punkty ze zbioru S, wewnątrz którego nie ma żadnych innych punktów ze zbioru S.

Rozwiązanie: Rozważmy takie dwa punkty A i B ze zbioru S, że wszystkie pozostałe punkty ze zbioru S znajdują się po jednej stronie prostej AB. Niech C będzie takim punktem ze zbioru S, że kąt ACB jest największy. Wtedy dla dowolnego innego punktu X ze zbioru S mamy $\sphericalangle AXB \leqslant \sphericalangle ACB$, zatem okrąg opisany na trójkącie ABC nie zawiera punktów ze zbioru S.

Zadanie 8. Na płaszczyźnie dane jest n punktów czarnych i n punktów białych, przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Udowodnij, że punkty białe da się połączyć w pary z czarnymi punktami za pomocą czerwonych odcinków tak, że żadne dwa czerwone odcinki się nie przecinają.

Rozwiązanie: Rozpatrzmy takie połączenie n punktów w pary, że suma długości wszystkich czerwonych odcinków jest najmniejsza możliwa.

Uzasadnimy, że gdyby w wyniku rozpatrywanego połączenia punktów pewne dwa czerwone odcinki A_1A_2, B_1B_2 przecinały się w pewnym punkcie X, to usuwając te dwa odcinki i zastępując je odcinkami: A_1B_2, A_2B_1, otrzymalibyśmy mniejszą sumę długości czerwonych odcinków.



Rysunek 3. Zmniejszenie sumy długości czerwonych odcinków.

Stało by się tak, ponieważ z nierówności trójkąta mamy

$$A_1X + XB_2 \geqslant A_1B_2 \text{ oraz } A_2X + XB_1 \geqslant A_2B_1,$$

z zastrzeżeniem, że jedna z nierówności musi być ostra, ponieważ w przeciwnym razie wszystkie cztery punkty A_1, A_2, B_1, B_2 byłyby współliniowe z punktem X, wbrew warunkom zadania. Dodając powyższe nierówności stronami, dostajemy zatem nierówność ostrą postaci

$$A_1A_2 + B_1B_2 > A_1B_2 + A_2B_1.$$

Istnienie powyższej konfiguracji stałoby zatem w sprzeczności z założeniem o minimalności sumy czerwonych odcinków. W takim razie w rozważanym połączeniu żadne dwa czerwone odcinki się nie przecinają.

Zadanie 1. Udowodnij, że nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^2 + 4n + 1$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 4n + 1 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2,$$

zatem rozważana liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Udowodnij, że nie istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że liczba

$$n^2 + 9n + 20$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16 < n^2 + 9n + 20 < n^2 + 10n + 25 = (n+5)^2,$$

zatem rozważana liczba nie może być kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. (X OMG, zawody III stopnia) Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczby

$$a^2 + 2b + 1 \quad \text{oraz} \quad b^2 + 2a + 1$$

są kwadratami liczb całkowitych. Wykaż, że $a = b$.

Rozwiązanie: Załóżmy, że liczby a, b są różne oraz $a > b$ (rozumowanie w przeciwnym przypadku jest analogiczne). Mamy

$$a^2 < a^2 + 2b + 1 < a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2,$$

zatem a^2+2b+1 nie może być kwadratem liczby całkowitej. Ta sprzeczność oznacza, że $a = b$.

Zadanie 4. Udowodnij, że nie istnieją dodatnie liczby całkowite x, y, dla których liczby

$$x^2 + 4y \quad \text{oraz} \quad y^2 + 4x$$

są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie: Załóżmy bez straty ogólności, że $x \geqslant y$. Mamy

$$x^2 < x^2 + 4y < x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2.$$

Skoro liczba x^2+4y jest kwadratem liczby całkowitej, to musi być równa liczbie $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. To oznacza, że $4y = 2x + 1$, co nie jest możliwe, gdyż lewa strona równania jest liczbą parzystą, natomiast prawa strona — liczbą nieparzystą.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie pary (x, y) dodatnich liczb całkowitych, dla których

$$x^2 = y^4 + y^2 + y + 1.$$

Rozwiązanie: Dla $y = 1$ mamy $x^2 = 4$, zatem $x = 2$. Para $(1, 2)$ spełnia warunki zadania. Uzasadnimy teraz, że dla $y > 1$ liczba $y^4 + y^2 + y + 1$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. Mamy bowiem $y < y^2$, a stąd

$$(y^2)^2 < y^4 + y^2 + y + 1 < y^4 + 2y^2 + 1 = (y^2+1)^2,$$

co oznacza, że dla $y > 1$ równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 6. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba

$$n^4 + 2n^3 - 3$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Dla $n = 1$ dana liczba jest równa 0, więc jest kwadratem liczby całkowitej. Uzasadnimy, że dla $n \geqslant 2$ rozważana liczba nie jest kwadratem. Skoro zachodzi nierówność

$$n^4 + 2n^3 - 3 < n^4 + 2n^3 + n^2 = (n^2+n)^2,$$

to wystarczy pokazać, że $n^4 + 2n^3 - 3 > (n^2 + n - 1)^2$.

Istotnie, mamy

$$\begin{aligned}(n^2+n-1)^2 &= (n^2+(n-1))^2\\ &= n^4+2n^2(n-1)+n^2-2n+1\\ &= n^4+2n^3-(n^2+2n-1).\end{aligned}$$

Stąd $n^2+2n-1=(n+1)^2-2 \geqslant 3^2-2=7>3$, a zatem

$$n^4+2n^3-(n^2+2n-1) < n^4+2n^3-3,$$

co kończy dowód.

Zadanie 7. Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczba całkowita $k>1$. Udowodnij, że liczba

$$n^k+n+1$$

nie jest k-tą potęgą liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Skoro mamy $n^k+n+1>n^k$, to wystarczy uzasadnić, że $n^k+n+1<(n+1)^k$. Nierówność ta jest prawdziwa, gdyż

$$\begin{aligned}(n+1)^k-n^k > n^{k-2}(n+1)^2-n^k &= n^k+2n^{k-1}+n^{k-2}-n^k\\ &= 2n^{k-1}+n^{k-2} > n+1.\end{aligned}$$

Zadanie 8. (LXIV OM, zawody III stopnia) Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych x,y, dla których

$$x^4+y=x^3+y^2.$$

Rozwiązanie: Przepiszmy dane równanie w postaci $y^2-y=x^4-x^3$. Mnożąc obie strony przez 4 i dodając obustronnie 1, dostajemy równoważne warunki

$$\begin{aligned}4y^2-4y+1 &= 4x^4-4x^3,\\ (2y-1)^2 &= (4x^4-4x^3+x^2)-x^2+1,\\ (2y-1)^2 &= (2x^2-x)^2-x^2+1.\end{aligned}$$

Mamy jednak

$$\begin{aligned}(2y-1)^2 &= x^2(2x-1)^2 - x^2 + 1 = (2x^2-x)^2 - (x^2-1)\\ &= ((2x^2-x-1)+1)^2 - x^2 + 1\\ &= (2x^2-x-1)^2 + 2(2x^2-x-1) + 1 - x^2 + 1\\ &= (2x^2-x-1)^2 + (3x^2-2x).\end{aligned}$$

Gdyby zachodziły jednocześnie warunki

$$x^2-1>0 \quad \text{oraz} \quad 3x^2-2x>0,$$

to liczba $(2y-1)^2$ leżałaby pomiędzy kwadratami kolejnych liczb całkowitych. W takim razie co najmniej jedna z powyższych nierówności nie może zachodzić.

Jeżeli $|x|>1$, to oczywiście $x^2-1>0$. Dla $x<0$ liczba $3x^2-2x$ również jest dodatnia, co jak wiadomo nie może mieć miejsca, natomiast dla $x>0$ mamy mamy $x^2-x \geqslant 0$, zatem $3x^2-2x = x^2+2(x^2-x)>0$, co ponownie wykluczamy.

Zatem pozostają przypadki $x=-1,0$ lub 1. W pierwszym przypadku dostajemy $y(y-1)=2$, zatem $y=2$ lub $y=-1$. W drugim przypadku $y(y-1)=0$, zatem $y=0$ lub $y=1$. W trzecim przypadku również dostajemy $y(y-1)=0$, zatem $y=0$ lub $y=1$. W takim razie pary

$$(-1,-1),\ (-1,2),\ (0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)$$

są jedynymi parami spełniającymi dane równanie.

Zadanie 1. Dane są dwa kwadraty $ABCD$ i $DEFG$, które mają wspólny punkt D i poza nim nie mają żadnych innych punktów wspólnych. Punkt M jest środkiem odcinka CE. Udowodnij, że $DM = \frac{1}{2}AG$.

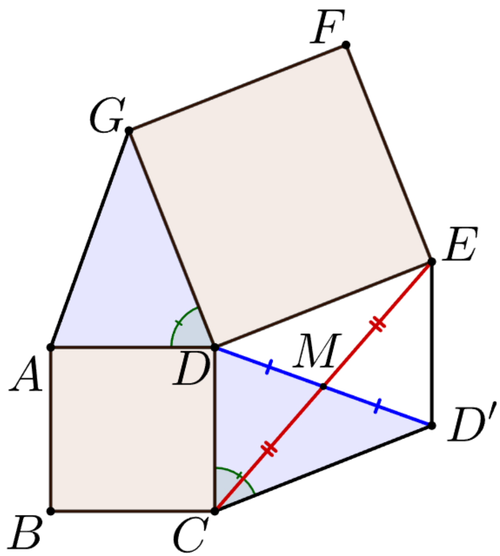
Rozwiązanie: Odbijmy punkt D względem punktu M i oznaczmy uzyskany punkt jako D'. W rezultacie czworokąt $DED'C$ jest równoległobokiem. Z tego wynika, że

$$\sphericalangle ADG = 180^\circ - \sphericalangle CDE = \sphericalangle DCD'.$$

Zauważmy, że trójkąt $\triangle DCD'$ jest przystający do trójkąta $\triangle ADG$, zgodnie z cechą bok–kąt–bok, ponieważ $AD = DC$ i $DG = DE$ oraz $\sphericalangle ADG = \sphericalangle DCD'$. Wiemy, że punkt M jest środkiem odcinka DD', zatem

$$DM = \frac{1}{2}DD' = \frac{1}{2}AG,$$

co należało wykazać.



Zadanie 2. Punkt M jest środkiem boku AC trójkąta ABC. Na boku BC wybrano punkt D spełniający zależność

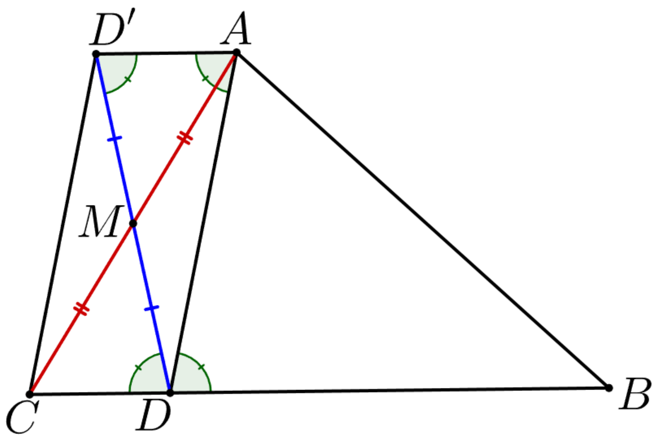
$$\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDM.$$

Udowodnij, że $AD = 2MD$.

Rozwiązanie: Odbijmy punkt D względem punktu M i oznaczmy uzyskany punkt jako D'. Zauważmy, że czworokąt $DAD'C$ jest równoległobokiem. Oznacza to, że proste AD oraz DC są równoległe. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DAD' = \sphericalangle ADB = \sphericalangle D'DC = \sphericalangle DD'A,$$

zatem trójkąt ADD' jest równoramienny, więc $AD = DD' = 2DM$, co należało wykazać.



Zadanie 3. Dany jest trójkąt równoramienny ABC o podstawie AC. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a prosta k przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do prostej AO. Okrąg o środku w punkcie B i promieniu BC przecina prostą k w punkcie D, różnym od punktu A. Udowodnij, że prosta CD jest prostopadła do prostej AB.

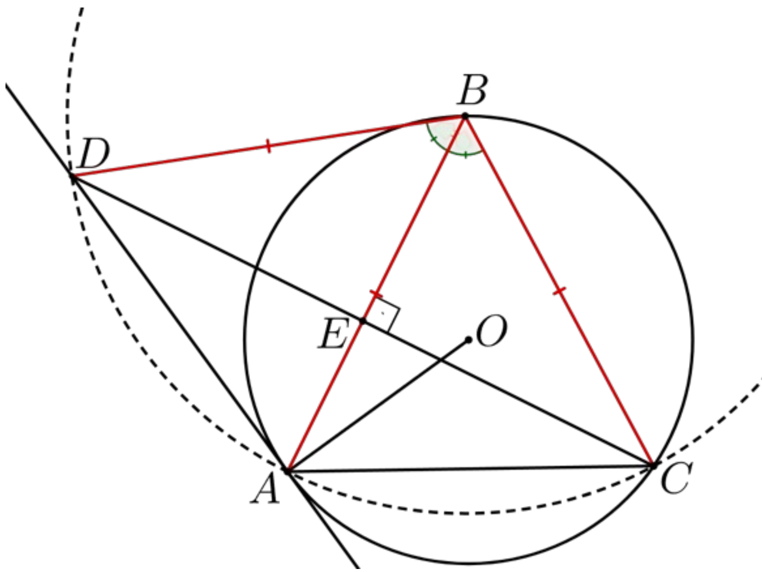
Rozwiązanie: Zauważmy, że trójkąt ABC przystaje do trójkąta $\triangle ABD$, ponieważ $AB = AB$, $BC = BD$ oraz

$$\sphericalangle DAB = 90^\circ - \sphericalangle BAO = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA = \sphericalangle BCA,$$

skąd wynika, że

$$\sphericalangle DBA = 180^\circ - 2\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC,$$

gdyż trójkąt $\triangle BAO$ jest równoramienny. Skoro $AD = AC$ i $DB = BC$, to punkty D i C są swoimi odbiciami względem prostej AB. Łącząca je prosta jest zatem prostopadła do AB, co należało wykazać.

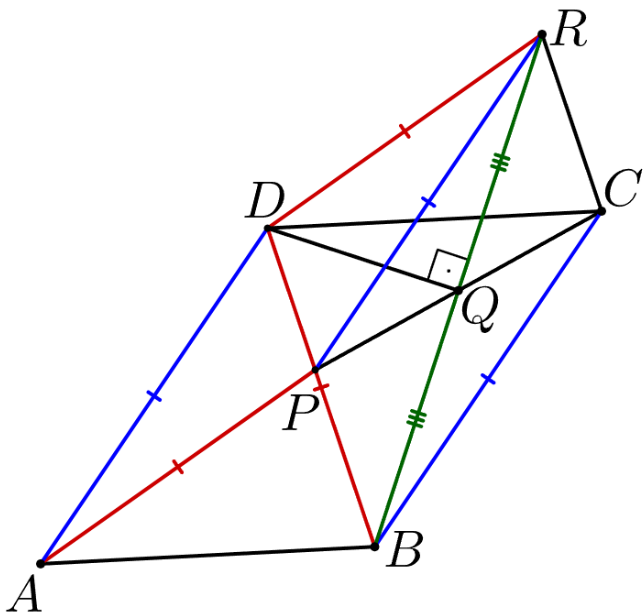


Zadanie 4. (XIV OMJ, zawody I stopnia) Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P, że spełniona jest równość $AP = BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP. Wykaż, że $\sphericalangle BQD = 90^\circ$.

Rozwiązanie:

Niech punkt R będzie odbiciem punktu B względem punktu Q. Wówczas czworokąt $BPRC$ jest równoległobokiem. Wtedy też wzajemnie równoległe są proste PR, BC, oraz AD, a także zachodzą równości $PR = BC = AD$, zatem czworokąt $ADRP$ również jest równoległobokiem.

Skoro $DR = AP = BD$, to odcinek BR jest podstawą trójkąta równoramiennego BDR. Wobec tego punkt Q, jako środek tej podstawy, jest także spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka D. Stąd wniosek, że $\sphericalangle BQD = 90^\circ$, co należało wykazać.

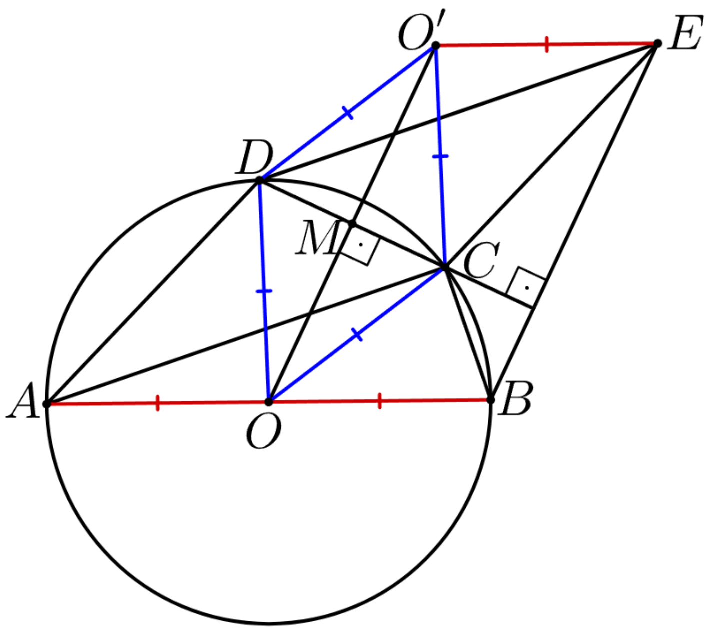


Zadanie 5. W czworokącie $ABCD$ zachodzi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = 90^\circ$. Punkt E jest symetryczny do punktu A względem środka odcinka CD. Wykaż, że prosta CD jest prostopadła do prostej BE.

Rozwiązanie: Oznaczmy jako M środek boku CD i jako O środek okręgu opisanego na $ABCD$. Następnie odbijmy punkt O względem punktu M i oznaczmy otrzymany punkt jako O'.

Wiemy, że $EM = MA$, więc czworokąt $EO'AO$ jest równoległobokiem. Zauważmy też, że $EO' = OA = BO$, a proste oraz EO' oraz BO są równoległe, zatem czworokąt $EO'OB$ jest równoległobokiem.

Zauważmy wreszcie, że $O'C = OD = OC = O'D$, gdyż punkt C jest odbiciem punktu D względem punktu M. Stąd punkt O' jest również odbiciem punktu O względem prostej CD, co oznacza z kolei, że prosta ta jest prostopadła do prostej $O'O$. Ta ostatnia, jest z kolei równoległa do prostej EB, co kończy dowód.



Zadanie 6. (X OMJ, zawody III stopnia) Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ$. Punkt M jest środkiem boku CD. Znając długości odcinków AD oraz BC, które wynoszą odpowiednio a oraz b, oblicz wartość wyrażenia

$$[ABM] - [DAM] - [BCM].$$

Uwaga: Przez $[\mathcal{F}]$ oznaczamy pole figury $\mathcal{F}$.

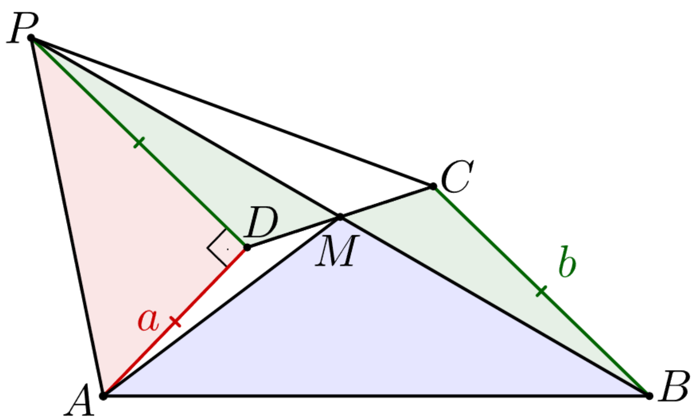
Rozwiązanie: Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu B względem punktu M. Wówczas $[ABM] = [APM]$, gdyż trójkąty ABM oraz APM mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A oraz równe podstawy BM i PM. Ponadto $[BCM] = [PDM]$, gdyż trójkąty BCM oraz PDM są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd wynika, że

$$[ABM] - [DAM] - [BCM] = [APM] - [DAM] - [PDM] = [ADP].$$

Zauważmy, że $DP = BC = b$ oraz

$$\begin{aligned} \sphericalangle ADP &= 360^\circ - \sphericalangle MDA - \sphericalangle PDM \\ &= 360^\circ - \sphericalangle CDA - \sphericalangle BCD \\ &= \sphericalangle DAB + \sphericalangle ABC = 90^\circ, \end{aligned}$$

skąd wniosek, że $[ADP] = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DP = \frac{1}{2}ab$.



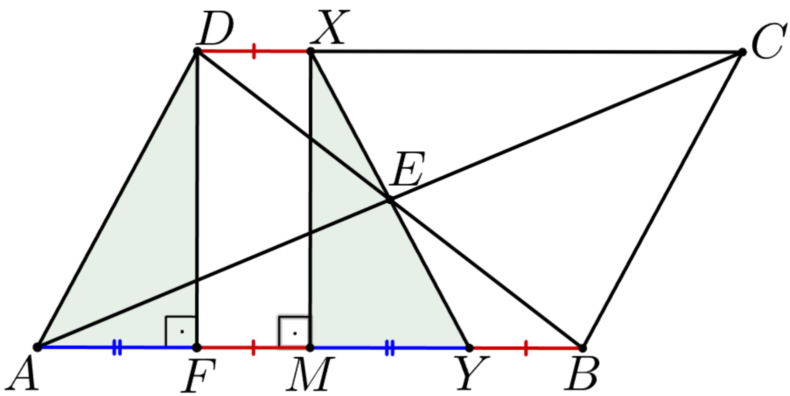
Zadanie 7. (XV OMJ, zawody II stopnia) Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym kąt wewnętrzny przy wierzchołku A jest ostry. Symetralna odcinka AB przecina odcinek CD w punkcie X. Przekątne tego równoległoboku przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $XE = \frac{1}{2}AD$.

Rozwiązanie: Rozważmy odbicie symetryczne względem punktu E. Wtedy punkt D jest symetryczny do punktu B, a punkt C do punktu A. Oznacza to, że odbicie punktu X względem punktu E leży na odcinku AB. Oznaczmy ten punkt przecięcia jako Y.

Oznaczmy rzut punktu D na prostą AB jako F, a także oznaczmy środek odcinka AB jako M. Wtedy czworokąt $DXMF$ jest prostokątem, a stąd $FM = DX = YB$. W takim razie

$$AF = AM - MF = MB - BY = MY.$$

Wobec tego trójkąty AFD oraz YMX są przystające, na mocy cechy bok–kąt–bok, zatem $AD = XY$. Stąd $XE = \frac{1}{2}XY = \frac{1}{2}AD$, co należało wykazać.



Zadanie 8. W trójkącie ABC znajduje się punkt E spełniający zależność $\sphericalangle ABE = \sphericalangle ECA$. Punkt D jest przecięciem prostych równoległych do odpowiednio prostych EB i EC przechodzących przez odpowiednio punkty C i B. Udowodnij, że $\sphericalangle DAB = \sphericalangle CAE$.

Rozwiązanie: Oznaczmy odbicia punktu E względem środków boków AB i AC odpowiednio jako F i G. Zauważmy, że zachodzą równoległości

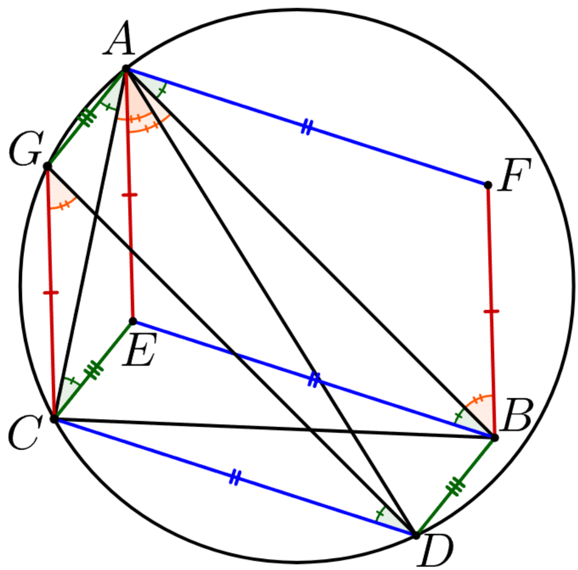
$$GC \parallel EA \parallel FB \quad \text{oraz} \quad FA \parallel BE \parallel CD.$$

Zauważmy też, że trójkąt GCD przystaje do trójkąta FAB, ponieważ $GC = EA = FB$, $FA = BE = CD$ oraz $\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle GCD$.

Zauważmy dalej, że $\sphericalangle FAB = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ECA = \sphericalangle CAG$ oraz $\sphericalangle FAB = \sphericalangle GDC$. Zatem czworokąt $ADCG$ jest wpisany w okrąg. Wobec tego

$$\sphericalangle FBA = \sphericalangle BAE = \sphericalangle DGC = \sphericalangle DAC.$$

Ostatnia równość wynika z twierdzenia o kącie wpisanym. Uzyskujemy zatem ostatecznie $\sphericalangle BAD = \sphericalangle EAC$, co należało wykazać.



Zadanie 1. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (a, b) spełniające $a^4 - b^4 = 65$.

Rozwiązanie: Korzystamy dwukrotnie ze wzoru na różnicę kwadratów:

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b).$$

Liczby a, b są całkowite, więc całkowite są również wszystkie czynniki postaci $a - b$, $a + b$ oraz $a^2 + b^2$. Skoro $a^4 - b^4 = 65$, to $a > b$, a zarazem $a - b$ jest liczbą dodatnią, podobnie jak $a + b$ i $a^2 + b^2$. Łatwo także zauważyć, że

$$a - b \leqslant a + b \leqslant a^2 + b^2,$$

więc rozważane trzy czynniki pochodzą z przedstawienia liczby 65 jako iloczynu trzech liczb naturalnych ustawionych w porządku niemalejącym. Istnieją tylko dwa takie rozkłady:

- $65 = 1 \cdot 1 \cdot 65$,
- $65 = 1 \cdot 5 \cdot 13$.

Rozważmy więc oba przypadki:

1. Pierwszy przypadek prowadzi do warunku $a + b = a - b = 1$, skąd $a^2 + b^2 = 1$, co jest niemożliwe, gdyż $a^2 + b^2 = 65$.
2. Drugi przypadek prowadzi do warunku $a - b = 1$. Wiemy jednak, że $a + b = 5$, więc $b = 2$ oraz $a = 3$. Mamy $5^4 - 3^4 = 81 - 16 = 65$, zatem uzyskana para spełnia warunki zadania.

Odpowiedź: Jedyna para liczb naturalnych (a, b) spełniających dane równanie to $(2, 3)$.

Uwaga. Można rozważyć ogólniejsze równanie $a^n - b^n = 65$ i zapytać: dla jakich dodatnich liczb całkowitych n ma ono rozwiązanie? Naśladując rozumowanie przedstawione wyżej i odpowiedni wzór skróconego mnożenia, możemy ponownie otrzymać warunek $a - b = 1$. Stąd (ponownie korzystając ze wzoru) mamy $a^n - b^n > a^{n-1} + b^{n-1}$, dla $n > 2$. Dla $n > 4$ mamy jednak $3^{n-1} \geqslant 81$, co wymusza z kolei $b = 1$. Stąd dla $n > 4$ nasze równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 2. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają $a^2 + b^2 = c^2$. Udowodnij, że liczba
$$\frac{1}{2}(c-a)(c-b)$$
jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Zauważmy, korzystając z warunku $a^2 + b^2 = c^2$, że
$$\begin{aligned} 2(c-a)(c-b) &= 2c^2 + 2ab - 2bc - 2ca \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca = (a+b-c)^2. \end{aligned}$$

Z uzyskanej równości wynika, że $\frac{1}{2}(c-a)(c-b) = \left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$. Skoro jednak $2(c-a)(c-b) = (a+b-c)^2$, to liczba $(a+b-c)^2$ jest parzysta. W takim razie liczba $a+b-c$ również jest parzysta. W konsekwencji liczba $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)^2$ jest rzeczywiście kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 3. Liczba n jest liczbą naturalną. Udowodnij, że:
a) liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6,
b) liczba $n^4 - n^2$ jest podzielna przez 12.

Rozwiązanie:
a) Zauważmy, że $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1)$. Jest to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc wśród nich znajduje się jedna liczba podzielna przez 3 oraz co najmniej jedna liczba podzielna przez 2 (być może ta sama). W takim razie iloczyn ten jest podzielny zarówno przez 2, jak i 3, więc jest on podzielny przez 6.

b) Zauważmy, że $n^4 - n^2 = n^2(n+1)(n-1)$. Rozważmy dwa przypadki:

(i) Liczba $(n+1)$ jest parzysta. Wtedy liczba $(n-1)$ również jest parzysta, więc cały iloczyn jest podzielny przez 4.

(ii) Liczba n jest parzysta. To implikuje, że liczba n^2 jest podzielna przez 4, a zatem cały iloczyn również jest podzielny przez 4.

Uzasadniliśmy zatem, że rozważana liczba jest podzielna przez 4. Z drugiej strony, $n^2(n-1)(n+1) = n \cdot n(n-1)(n+1)$, zatem na mocy poprzedniego punktu iloczyn ten jest podzielny również przez 3.

Zadanie 4. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych (x, y, z) spełniające

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2.$$

Rozwiązanie: Przekształcamy zadane równanie równoważnie:

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx - x^2 + y^2 - z^2 = 0\\
&2y^2 - 2xy - 2yz + 2zx = 0\\
&(y - x)(y - z) = 0
\end{aligned}$$

Stąd $y = x$ lub $y = z$. Zatem wszystkie trójki (x, y, z) postaci (a, a, b) bądź (b, a, b) spełniają rozważane równanie.

Zadanie 5. Dla liczb całkowitych dodatnich a, b oraz n zachodzi równość

$$\frac{a}{b} = \frac{a^2 + n^2}{b^2 + n^2}.$$

Udowodnij, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita.

Rozwiązanie: Z warunku z treści zadania wynika, że istnieje taka dodatnia liczba r (niekoniecznie całkowita), że spełnione są równości $ar = a^2 + n^2$, oraz $br = b^2 + n^2$. Odejmując je stronami, mamy

$$\begin{aligned}
&ar - br = a^2 + n^2 - b^2 - n^2,\\
&r(a - b) = a^2 - b^2,\\
&r(a - b) = (a + b)(a - b).
\end{aligned}$$

Rozważmy dwa przypadki:

1. Liczba $(a - b)$ jest zerem. Wtedy $a = b$, więc $\sqrt{ab}$ jest liczbą całkowitą.

2. Liczba $(a - b)$ jest różna od zera. Wtedy możemy podzielić obustronnie przez $(a - b)$. Dostajemy $r = (a + b)$, co daje nam:

$$a^2 + n^2 = ar = a(a + b) = a^2 + ab \Rightarrow n^2 = ab.$$

   Z powyższej równości wynika, że liczba $\sqrt{ab}$ jest całkowita, co kończy dowód.

Zadanie 6. Liczby rzeczywiste x, y oraz z są różne od zera. Udowodnij, że jeśli spełniają one układ równań

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \\ z^2 + z = x^2 \end{cases}$$

to $(x-y)(y-z)(z-x) = 1$.

Rozwiązanie: Dodając równania stronami i redukując wyrazy, uzyskujemy $x+y+z=0$. Gdyby $x+y=0$, to wtedy $z = x+y+z-x-y = 0$, co jest sprzeczne z założeniem w treści zadania. Zatem liczba $x+y$ i analogicznie liczby $y+z$, $z+x$ muszą być niezerowe.

Zapiszmy drugie równanie w postaci $y^2 = z^2 - y$. Wstawiając tę równość do pierwszego równania, otrzymujemy równoważne warunki

$$\begin{aligned} x^2 + x &= z^2 - y, \\ x^2 - z^2 &= -(x+y), \\ (x+z)(x-z) &= -(x+y). \end{aligned}$$

Wykonując analogiczne przekształcenia dla równania drugiego i trzeciego dostajemy:

$$\begin{cases} (x+z)(x-z) = -(x+y), \\ (y+x)(y-x) = -(y+z), \\ (z+y)(z-y) = -(z+x). \end{cases}$$

Po przemnożeniu tych trzech równań obustronnie, dostajemy

$$(x+z)(x-z)(y+x)(y-x)(z+y)(z-y) = -(x+y)(y+z)(z+x).$$

Skoro $(x+y)(y+z)(z+x) \neq 0$, to możemy obustronnie podzielić przez ten iloczyn, przez co otrzymujemy $(x-y)(y-z)(z-x) = 1$.

Zadanie 7. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równość:

$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2.$$

Udowodnij, że

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4.$$

Rozwiązanie: Pierwsza równość implikuje:

$$\begin{gathered}a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2 \\ 2a^2 + 2b^2 + 2ab = 2c^2 + 2d^2 + 2cd \\ a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd.\end{gathered}$$

Stosując wzory na czwartą potęgę sumy oraz sumę kwadratów, mamy

$(a^4 + b^4 + (a+b)^4) - (c^4 + d^4 + (c+d)^4) =$
$(2a^4 + 2b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2) - (2c^4 + 2d^4 + 4c^3d + 4cd^3 + 6c^2d^2) =$
$2(a^2 + ab + b^2)^2 - 2(c^2 + cd + d^2)^2.$

Jednak, jak wcześniej pokazano, $a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd$, więc wyrażenie powyżej równe jest 0.

Zadanie 8. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań:

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 + 4yz + z^2 = 1 \\ z^2 + 4zx + x^2 = -2 \end{cases}$$

Rozwiązanie: Porównując lewe strony pierwszego i drugiego równania otrzymujemy $x^2 + 4xy = 4yz + z^2$, skąd

$$0 = x^2 - z^2 + 4xy - 4xz = (x-z)(x+z+4y)$$

Jeśli $x - z = 0$, to $x = z$ i trzecie równanie przyjmuje postać $6x^2 = -2$; jednak kwadrat liczby rzeczywistej nie może być ujemny. W takim razie $x - z \neq 0$, wobec czego $x + z + 4y = 0$.

Z drugiej strony, dodając stronami wszystkie trzy równania dostajemy $2(x+y+z)^2 = 0$, skąd $x + y + z = 0$. Otrzymane związki dają nam $3y = (x+z+4y) - (x+y+z) = 0$, więc $y = 0$. Stąd $x + z = 0$, tj. $z = -x$. Pierwsze równanie redukuje się do postaci $x^2 = 1$, skąd $x = 1$ lub $x = -1$.

Otrzymaliśmy dwie możliwe trójki rozwiązań: $(x,y,z) = (1,0,-1)$ oraz $(x,y,z) = (-1,0,1)$. Bezpośrednie podstawienie pokazuje, że obie spełniają wyjściowy układ równań.

Zadanie 1. Trapez $ABCD$ wpisany w okrąg ω ma podstawy AB i CD. Na okręgu ω wybrano punkty P i Q tak, by punkty A, P, Q, B, C i D leżały w tej właśnie kolejności na okręgu ω. Odcinki PC i QA przecinają się w punkcie X, a odcinki PB i OD przecinają się w punkcie Y. Udowodnij, że na czworokącie $PQXY$ można opisać okrąg.

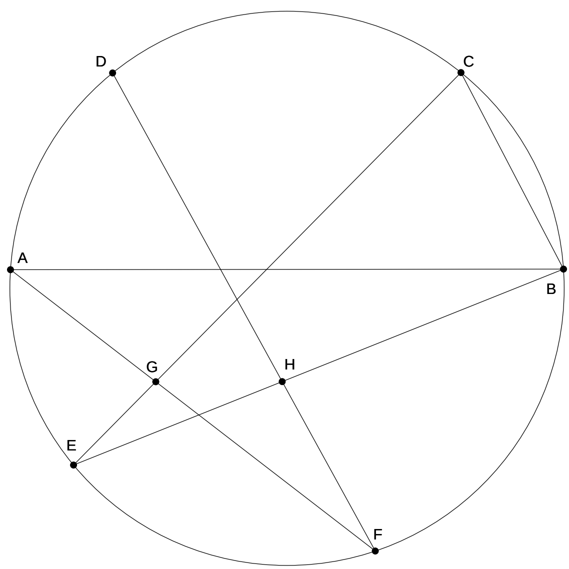
Rozwiązanie: Skoro proste AB i CD są równoległe, to korzystając z Przykładu 2 wnioskujemy, że $BC = DA$. Zatem łuki DA i BC są równe, a kąty oparte na nich mają równe miary:

$$\sphericalangle CPB = \sphericalangle DQA.$$

Ponieważ punkty P, Q leżą po tej samej stronie prostej XY, to

$$\sphericalangle XPY = \sphericalangle XQY,$$

co na mocy własności 4 daje tezę.



Zadanie 2. W trójkącie równoramiennym ABC kąty wewnętrzne przy podstawie AB mają miary 40°. Dwusieczna kąta CBA przecina prostą AC w punkcie D. Udowodnij, że $BD + CD = AB$.

Rozwiązanie: Niech ω będzie okręgiem opisanym na trójkącie BCD. Oznaczmy przez E drugi, różny od B, punkt przecięcia tego okręgu z bokiem AB. Skoro na czworokącie $BCDE$ można opisać okrąg, to

$$\sphericalangle DCB + \sphericalangle DEB = 180^\circ,$$

więc

$$\sphericalangle DEB = 180^\circ - \sphericalangle DCB = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 80^\circ.$$

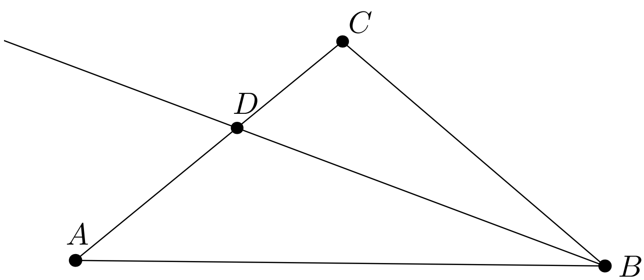
Zgodnie z definicją punktu D, kąty opisane na łukach ED i DC są równe, więc $ED = DC$. Zauważmy dalej, że

$$\sphericalangle ADE = 180^\circ - \sphericalangle DAE - (180^\circ - \sphericalangle DEB) = 80^\circ - \sphericalangle CAB = 40^\circ.$$

Skoro $\sphericalangle DBE = 20^\circ$ oraz $\sphericalangle DEB = 80^\circ$, to

$$\sphericalangle EDB = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ.$$

Z otrzymanych równości kątów wnioskujemy, że trójkąty DEB oraz DEA są równoramienne, a zatem $AE = ED = CD$ oraz $EB = BD$. W takim razie $AB = AE + EB = CD + BD$, co kończy dowód.



Zadanie 3. Kąty wewnętrzne czworokąta $ABCD$ spełniają warunek $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 60^\circ$. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCD. Udowodnij, że $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$.

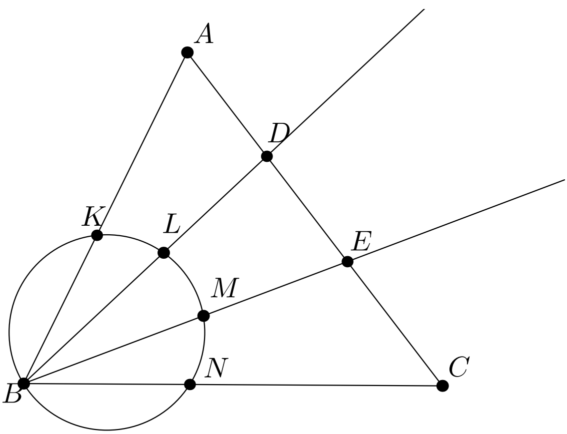
Rozwiązanie: Zauważmy, że z własności 1 wynika równość

$$\sphericalangle BOD = 2\sphericalangle BCD = 120^\circ.$$

Ponieważ $\sphericalangle BOD + \sphericalangle BAD = 180^\circ$, więc na czworokącie $ABOD$ można opisać okrąg. Skoro jednak $BO = OD$, to kąty oparte na łukach BO i OD tego okręgu są sobie równe (tj. O jest środkiem łuku BD). Zatem $\sphericalangle BAO = \sphericalangle DAO$.

Zadanie 4. Punkty D i E leżą na boku AC trójkąta ABC. Półproste BD i BE dzielą kąt ABC na trzy równe części. Okrąg przechodzący przez punkt B przecina półproste BA, BC, BD i BE odpowiednio w punktach K, L, M i N. Udowodnij, że punkty K, L, M i N są wierzchołkami trapezu.

Rozwiązanie: Ponieważ punkty K, L, M, N leżą na okręgu oraz kąty LBN i KBM są równe, to łuki KM oraz LN tego okręgu są równe. W takim razie $KM = LN$ i na mocy przykładu 2 proste KL i MN są równoległe.



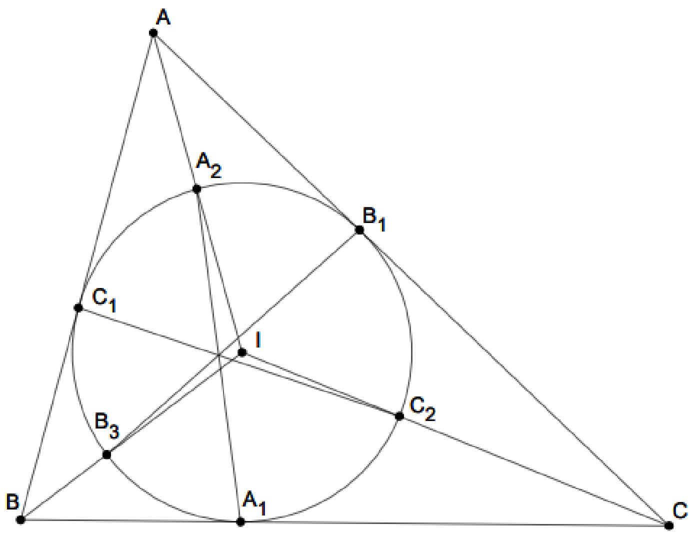
Zadanie 5. W trójkącie ABC okrąg wpisany o środku w punkcie I jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach A_1, B_1 i C_1. Odcinki AI, BI i CI przecinają okrąg wpisany odpowiednio w punktach A_2, B_2 i C_2. Udowodnij, że proste A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie: Zauważmy, że proste AC_1 i AB_1 są styczne do okręgu wpisanego, zatem

$$AC_1 = AB_1 \quad \text{oraz} \quad IB_1 = IC_1.$$

Wobec tego punkty I oraz A leżą na symetralnej odcinka B_1C_1, skąd wnioskujemy, że prosta AI jest tego odcinka symetralną.

Punkt A_2 jest przecięciem osi symetrii łuku B_1C_1 z tymże łukiem; jest to zatem środek tego łuku (patrz: uwaga do przykładu 1). Zatem prosta A_1A_2 jest dwusieczną w trójkącie $A_1B_1C_1$. To samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla dwóch pozostałych wierzchołków, wnioskując że proste proste B_1B_2 oraz C_1C_2 są dwusiecznymi tego trójkąta. Jednak znanym faktem jest, że dwusieczne w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, z czego wynika już teza.



Zadanie 6. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg spełniona jest równość $AB = BD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano taki punkt E, że $CE = CD$, przy czym punkty E, C, A leżą w tej kolejności na prostej AC. Udowodnij, że $BE = BD$.

Rozwiązanie: Punkt B leży na symetralnej odcinka AD. Z drugiej strony z faktu, że trójkąt CED jest równoramienny wnioskujemy, że:

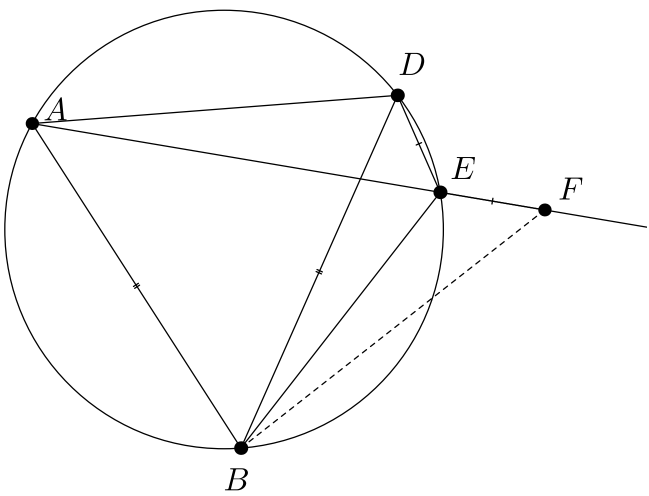
$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 180^\circ - \sphericalangle DCE = \sphericalangle CDE + \sphericalangle CED = 2\sphericalangle DEC,$$

gdyż trójkąt CED jest równoramienny.

W trójkącie AED punkt B jest takim punktem na symetralnej odcinka AD, który spełnia $\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED$. W trójkącie istnieją tylko dwa punkty mające taką własność — środek okręgu opisanego i odbicie środka okręgu opisanego względem boku AD. Jednak

$$\sphericalangle AED = \frac{1}{2}\sphericalangle ABD < 90^\circ$$

oraz punkty B i E leżą po tej samej stronie prostej AD, więc punkt B musi być środkiem okręgu opisanego na trójkącie AED. Wobec tego $BA = BD = BE$, co kończy dowód.

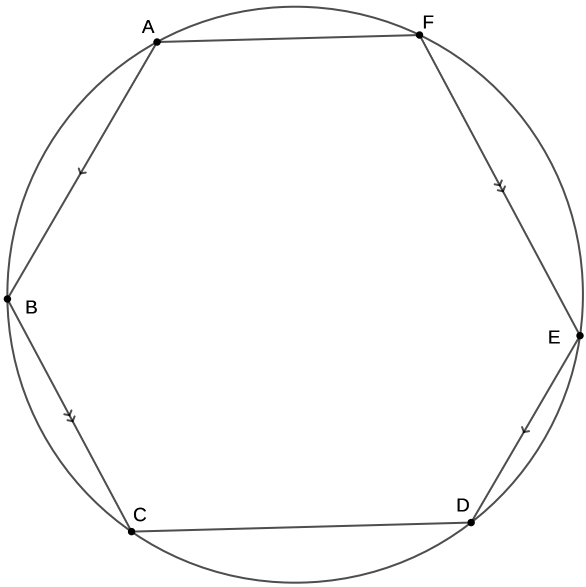


Zadanie 7. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg, przy czym prosta AB jest równoległa do prostej DE oraz prosta BC jest równoległa do prostej EF. Wykaż, że prosta CD jest równoległa do prostej AF.

Rozwiązanie: Na mocy przykładu 2 mamy $AE = BD$ oraz $BF = CE$. Łuki AE oraz BD, a także EC oraz BF są równe, gdyż równe są odpowiadające im cięciwy. Dostajemy więc, że $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BFD$ oraz $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BDF$. Wtedy

$$\sphericalangle AEC = 180^\circ - \sphericalangle ACE - \sphericalangle CAE = 180^\circ - \sphericalangle BFD - \sphericalangle BDF = \sphericalangle FBD.$$

W takim razie trójkąty ACE i DFB są przystające na mocy cechy bok–kąt–bok (mamy $AE = DB$ oraz $CE = FB$). Z tego wynika równość $AC = DF$, a zatem też teza — na mocy przykładu 2.



Zadanie 8. Dany jest trójkąt ABC, gdzie $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ oraz $AC < BC$. Punkty E i F leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC, przy czym $BF = BC$ oraz $AE = AC$, przy czym zakładamy, że punkty E i B są różne oraz punkty F i C są różne. Punkt G jest punktem przecięcia odcinków EF i AB. Udowodnij, że $\sphericalangle BCG = \sphericalangle ACG$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że

$$\sphericalangle FCE = 180^\circ - \sphericalangle FAE = 180^\circ - \sphericalangle FAC - \sphericalangle EAC.$$

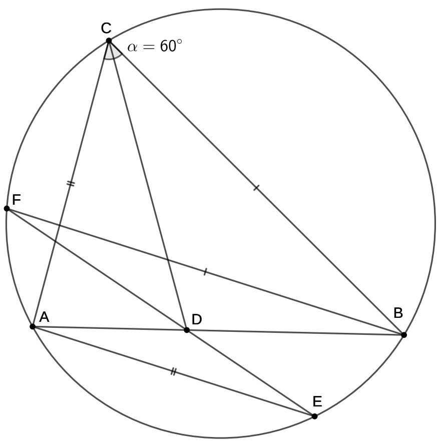
Wiemy jednak, że trójkąty EAC i FBC są równoramienne, więc:

$$\begin{aligned}\sphericalangle FCE &= 2\sphericalangle CEA + 2\sphericalangle CFB - 180^\circ = 2\sphericalangle CBA + 2\sphericalangle CAB - 180^\circ \\ &= 360^\circ - 2\sphericalangle ACB - 180^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.\end{aligned}$$

W szczególności,

$$\sphericalangle FCA = \sphericalangle FCB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle FCB - \sphericalangle FCE = \sphericalangle ECB,$$

zatem kąty oparte na łukach FA oraz EB są równe. Na mocy przykładu 2 wiemy, że prosta AE jest równoległa do prostej BF. Stąd trójkąty GFB oraz GEA również są równoramienne i podobne na mocy cechy kąt–kąt–kąt. Oznacza to, że $\frac{AG}{BG} = \frac{AE}{BF} = \frac{AC}{BC}$, a zatem na mocy twierdzenia o dwusiecznej punkt G jest spodkiem dwusiecznej poprowadzonej z wierzchołka C w trójkącie ABC, gdyż istnieje tylko jeden punkt na boku trójkąta spełniający zadany przez te proporcje warunek.



Zadanie 1. Udowodnij, że sumę dwóch kolejnych liczb pierwszych większych od 2 zawsze można przedstawić w postaci iloczynu trzech liczb całkowitych większych od 1.

Rozwiązanie: Kolejne liczby pierwsze $p < q$ większe od 2 są nieparzyste, zatem ich suma jest parzysta. Oznacza to, że możemy zapisać $p + q = 2a$, gdzie a jest liczbą całkowitą. W takim razie $p < a < q$. Wobec tego a nie może być liczbą pierwszą, bo p i q to dwie kolejne liczby pierwsze. Liczba a jest większa od 1 i złożona, więc ma dzielnik pierwszy r. Stąd $p + q = 2 \cdot r \cdot \frac{a}{r}$, co kończy dowód.

Zadanie 2. Rozstrzygnij, czy równanie $200^a \cdot 10^b = 20^c$ ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich.

Rozwiązanie: Przekształćmy równanie do równoważnej postaci, używając rozkładu na czynniki pierwsze:

$$\begin{aligned}(2^3 \cdot 5^2)^a \cdot (2 \cdot 5)^b &= (2^2 \cdot 5)^c,\\ 2^{3a} \cdot 5^{2a} \cdot 2^b \cdot 5^b &= 2^{2c} \cdot 5^c,\\ 2^{3a+b} \cdot 5^{2a+b} &= 2^{2c} \cdot 5^c.\end{aligned}$$

Porównując krotności liczb 2 oraz 3 w rozkładach liczb po obydwu stronach, uzyskujemy warunki $3a + b = 2c$ oraz $2a + b = c$. W takim razie $3a + b = 2(2a + b) = 4a + 2b$, zatem $a + b = 0$. To jest niemożliwe, gdyż $a, b > 0$. Oznacza to, że rozważane równanie nie ma rozwiązań.

Zadanie 3. Znajdź co najmniej jedną taką parę (a, b) liczb całkowitych dodatnich, spełniającą warunek $3a^4 = 7b^3$.

Rozwiązanie: Skoro $3a^4 = 7b^3$, to liczba 7 jest dzielnikiem a^4 oraz liczba 3 jest dzielnikiem b^3. Zatem także liczba a jest podzielna przez 7 oraz liczba b jest podzielna przez 3. Niech $a = 7k$, $b = 3l$. Wtedy wyjściowe równanie przyjmuje postać $3 \cdot 7^4 \cdot k^4 = 7 \cdot 3^3 \cdot l^3$, zatem po uproszczeniu $7^3 \cdot k^4 = 9 \cdot l^3$. Stąd łatwo widzieć, że biorąc $k = 9$ oraz $l = 7 \cdot 9$, uzyskujemy równość. Równanie spełnia na przykład para $(a, b) = (63, 189)$.

Zadanie 4. Iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest jednocześnie iloczynem czterech liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Jakie to liczby?

Rozwiązanie: Wśród trzech kolejnych liczb całkowitych co najmniej jedna jest podzielna przez 2 i jedna jest podzielna przez 3. Zatem jedna z czterech liczb pierwszych to 2, a inna to 3. Niech p, q to pozostałe dwie liczby pierwsze.

Rozważmy dany nam iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych i podzielmy przez 2 tą, która jest podzielna przez 2 (jeżeli są dwie parzyste, to którąkolwiek). Podzielmy też przez 3 tą, która jest podzielna przez 3. Iloczyn trzech uzyskanych liczb równy jest pq. Zatem jedna z nich musi być równa 1, bo w przeciwnym wypadku każda z trzech liczb miałaby własny dzielnik pierwszy. Przed podzieleniem liczba ta musiała być równa co najwyżej 6. Pozostają wobec tego przypadki:

- $1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$
- $2 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
- $3 \cdot 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $4 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
- $5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $6 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

przy czym tylko w drugim, trzecim i piątym przypadku uzyskujemy iloczyn czterech liczb pierwszych.

Zadanie 5. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, że cztery ostatnie cyfry każdej z liczb ab, bc, ca to 2024? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie: Jeżeli cztery ostatnie cyfry danej liczby całkowitej to 2024, to ma ona postać $10000k + 2024$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Liczba 10000 jest podzielna przez 16, natomiast liczba 2024 daje resztę 8 przy dzieleniu przez 16; stąd liczba $10000k + 2024$ daje resztę 8 z dzielenia przez 16.

Wnioskujemy stąd, że krotność liczby 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze każdej z liczb ab, bc, ca równa jest 3. To oznacza, że krotność 2 w iloczynie $(ab)(bc)(ca) = a^2b^2c^2$ równa jest $3 + 3 + 3 = 9$, czyli jest to liczba nieparzysta. Jednak kwadrat liczby całkowitej musi mieć parzystą krotność każdego swojego dzielnika pierwszego. Zatem szukane liczby a, b, c nie istnieją.

Zadanie 6. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że liczba $13p + 1$ jest sześcianem liczby całkowitej dodatniej.

Rozwiązanie: Niech $13p+1 = n^3$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas

$$13p = n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$$

Stąd liczba $n - 1$ jest dodatnim dzielnikiem liczby $13p$, zatem jest równa jednej z liczb 1, 13, p, $13p$ (te cztery liczby niekoniecznie są parami różne). Rozważmy osobno te przypadki:

1. Jeżeli $n - 1 = 1$, to $n = 2$, co daje sprzeczność po podstawieniu do oryginalnego równania.

2. W przypadku $n - 1 = 13$ mamy $n = 14$, zatem

   $$p = n^2 + n + 1 = 196 + 14 + 1 = 211.$$

   Liczba ta jest pierwsza, zatem spełnia warunki zadania, gdyż nasze przekształcenie oryginalnej równości jest do niej równoważne.

3. Jeżeli $n - 1 = 13p$, to $n^2 + n + 1 = 1$, co jest niemożliwe.

4. Pozostał przypadek $n - 1 = p$. Wtedy jednak $n^2 + n + 1 = 13$, zatem $n^2 + n = 12$. Liczba $n^2 + n$ jest tym większa, im większa jest liczba n. Przy tym $12 = 3^2 + 3$. Stąd dla n większych od 3 będzie zachodziło $n^2 + n > 12$, a dla mniejszych — $n^2 + n < 12$.

   W rezultacie dostajemy $n = 3$, czyli $13p = 3^3 - 1 = 26$ i w konsekwencji $p = 2$.

Łącząc wszystkie rozpatrzone przypadki uzyskujemy, że szukane liczby pierwsze p to 2 oraz 211.

Zadanie 7. Wykaż, że jeżeli p i q są różnymi liczbami pierwszymi, to liczba $p^3 + q^3$ nie może być podzielna przez liczbę $p^2 + q^2$.

Rozwiązanie: Przypuśćmy przeciwnie, że $(p^3 + q^3) = (p^2 + q^2) \cdot k$, gdzie k jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas

$$\begin{aligned} k(p^2 + q^2) &= p^3 + q^3 \\ &= (p^2 + q^2)(p + q) - p^2 q - pq^2 \\ &= (p^2 + q^2)(p + q) - pq(p + q). \end{aligned}$$

Stąd

$$(p^2 + q^2)(p + q - k) = pq(p + q).$$

Zauważmy, że lewa strona musi być podzielna przez p, gdyż prawa strona jest wielokrotnością p. Gdyby jednak liczba $p^2 + q^2$ była podzielna przez p, to podzielna przez p byłaby również liczba q^2, a to oznaczałoby $p = q$, gdyż q jest jedynym dzielnikiem pierwszym q^2. Jest to sprzeczność z założeniami.

Zatem liczba $p + q - k$ musi być podzielna przez p. Analogicznie jednak możemy stwierdzić, że liczba $p + q - k$ jest podzielna przez q. Wobec tego liczba $p + q - k$ jest podzielna także przez pq. Skoro $pq(p + q) > 0$ i $p^2 + q^2 > 0$, to $p + q - k > 0$, a zatem

$$p + q \geqslant p + q - k \geqslant pq.$$

To oznacza, że $pq - p - q + 1 \leqslant 1$. W takim razie $(p - 1)(q - 1) \leqslant 1$. Jednak iloczyn ten nie może być równy 0, gdyż $p, q > 1$, a więc musi być on równy 1. Wtedy uzyskalibyśmy $p = 2, q = 2$, co jest sprzeczne z oryginalnymi założeniami.

Zadanie 8. Rozwiąż w liczbach pierwszych p, q, r równanie

$$pr(p - 4) = q(2r - 2p - q)$$

Rozwiązanie: Dodajmy obustronnie $4pr$ do danego równania:

$$p^2 r = 4pr + 2rq - 2pq - q^2 = (2r - q)(2p + q)$$

Jeżeli liczba $2p + q$ miałaby być podzielna przez p, to również liczba q byłaby podzielna przez p jako różnica dwóch wielokrotności p. Wtedy jednak mielibyśmy $p = q$, i w konsekwencji przekształcilibyśmy uzyskane wyżej równanie do postaci $p^2 r = (2r - p) \cdot 3p$, czyli $pr = 6r - 3p$. Ten warunek jest równoważny z następującym:

$$(p - 6)(r + 3) = -18.$$

Wówczas $p - 6$ jest liczbą ujemną i dzielnikiem -18, a zatem $p = 5$ lub $p = 3$. W tym pierwszym przypadku mamy $r + 3 = 15$, zatem $r = 12$, lecz 12 nie jest liczbą pierwszą; w tym drugim mamy $r + 3 = 6$, zatem $r = 3$. Trójka $(p, q, r) = (3, 3, 3)$ spełnia warunki zadania.

Wróćmy do warunku $p^2 r = (2r - q)(2p + q)$. Rozstrzygnęliśmy przypadek, gdy liczba $2p + q$ miałaby być podzielna przez p. Załóżmy teraz, że liczba $2p + q$ nie jest podzielna przez p. To oznacza, że liczba $(2r - q)$ musi być podzielna przez p^2. Innymi słowy, możemy zapisać $2r - q = kp^2$, zatem

$$r = \frac{kp^2 + q}{2}.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} p^2 \cdot \frac{kp^2 + q}{2} &= kp^2 \cdot (2p + q) \\ kp^2 + q &= 2k(2p + q) \\ q &= k(4p + 2q - p^2). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy kolejne równanie, w którym rozważyć możemy pewne przypadki wartości liczby k, pamiętając, że q jest liczbą pierwszą.

- Jeśli $k = q$, to $r = q \cdot \frac{p^2+1}{2}$. Jeżeli p jest liczbą nieparzystą, to $\frac{p^2+1}{2} > 1$. Jednak liczba r nie może być iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1. Zatem $p = 2$. Skoro liczba $\frac{q \cdot (2^2+1)}{2}$ jest całkowita, to licznik tego ułamka musi być parzysty, zatem sama liczba q musi być parzysta, więc $q = 2$. Wtedy $r = 5$. Trójka $(p, q, r) = (2, 2, 5)$ nie spełnia oryginalnego równania.
- Jeśli $k = -q$, to

  $$r = \frac{kp^2 + q}{2} = \frac{-qp^2 + q}{2} = -q \cdot \frac{p^2 - 1}{2} < 0,$$

  co prowadzi do sprzeczności.

- Jeśli $k = 1$, to $q = 4p + 2q - p^2$, zatem $q = p^2 - 4p$. Zatem

  $$r = \frac{p^2 + p^2 - 4p}{2} = p^2 - 2p = p(p-2).$$

  Wówczas otrzymujemy $p = r$, $p - 2 = 1$, zatem $r = p = 3$. Wtedy jednak uzyskujemy $q < 0$, co prowadzi do sprzeczności.

- Jeśli $k = -1$, to $q = p^2 - 2q - 4p$, zatem $3q = p^2 - 4p$. Ale wówczas

  $$r = \frac{kp^2 + q}{2} = \frac{-p^2 + \frac{p^2-4p}{3}}{2} = \frac{-3p^2 + p^2 - 4p}{6} = \frac{-2p^2 - 4p}{6} < 0$$

  Ponownie otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem jedyną szukaną trójką jest $(3, 3, 3)$.

Rozwiązania konkursów

I Konkurs Facebookowego Kółka OMJ

1. Liczby całkowite a oraz b spełniają warunek $a - b = 1$. Udowodnij, że liczba
$$\frac{4a^3 - 4b^3 - 1}{3}$$
jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Podstawiając $b = a - 1$, dostajemy
$$\begin{aligned}\frac{4a^3 - 4b^3 - 1}{3} &= \frac{4a^3 - 4(a-1)^3 - 1}{3}\\ &= \frac{4a^3 - 4(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) - 1}{3}\\ &= \frac{4a^3 - 4a^3 + 12a^2 - 12a + 4 - 1}{3}\\ &= \frac{12a^2 - 12a + 3}{3}\\ &= 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2,\end{aligned}$$
co oczywiście jest kwadratem liczby całkowitej.

2. W przestrzeni danych jest $n \geqslant 3$ punktów $A_1, A_2 \ldots A_n$. Udowodnij, że można wybrać takie dwa różne punkty A_k oraz A_l, że dla każdego innego punktu A_i kąty $\sphericalangle A_iA_kA_l$ oraz $\sphericalangle A_iA_lA_k$ są ostre.

Rozwiązanie: Spośród wszystkich odcinków w przestrzeni o końcach w zbiorze $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ wybierzmy najdłuższy i nazwijmy go A_kA_l. W ten sposób dla każdego innego punktu A_i trójkąt o wierzchołkach w punktach A_i, A_k, A_l ma najdłuższy bok A_kA_l.

Skoro największy kąt w trójkącie jest naprzeciwko najdłuższego boku, to jedynym kątem, który nie jest ostry w trójkącie $A_kA_lA_i$ może być kąt $\sphericalangle A_kA_iA_l$, z czego uzyskujemy już tezę.

3. Znajdź największą dodatnią liczbę całkowitą n o tej własności, że liczba $n^3 + 100$ jest podzielna przez liczbę $n + 10$.

Rozwiązanie: Niech $m = n + 10$. Wtedy $n = m - 10$, zatem

$$\begin{aligned}
(n^3 + 100) &= (m - 10)^3 + 100 \\
&= (m^2 - 20m + 100)(m - 10) + 100 \\
&= m^3 - 10m^2 - 20m^2 + 200m + 100m - 1000 + 100 \\
&= m^3 - 30m^2 + 300m - 900 \\
&= m(m^2 - 30m + 300) - 900.
\end{aligned}$$

Skoro $m^2 - 30m + 300$ jest liczbą całkowitą, to $m(m^2 - 30m + 300)$ jest wielokrotnością m. Na mocy warunku z treści zadania liczba $(n^3 + 100)$ też jest wielokrotnością m. Różnica dwóch wielokrotności danej liczby też jest wielokrotnością tej liczby, zatem 900 jest wielokrotnością m. W takim razie $n + 10$ jest dzielnikiem 900 i stąd $n \leqslant 890$.

Liczba $n = 890$ spełnia warunki zadania, gdyż różnica

$$m(m^2 - 30m + 300) - 900$$

jest wielokrotnością m jako różnica dwóch wielokrotności m.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Punkt T leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia warunki

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle CTA = 120^\circ.$$

Punkty X i Y są odpowiednio środkami odcinków AB i AC. Udowodnij, że punkty A, Y, T, X leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie:

Sposób 1: W przypadku, gdy trójkąt ABC jest równoboczny, czyli gdy punkty T oraz O pokrywają się, teza zadania staje się oczywista na podstawie obserwacji, że punkt O leży w tym przypadku na okręgu opisanym na trójkącie AXY.

Przejdźmy do przypadku, w którym trójkąt ABC nie jest równoboczny. Bez straty ogólności załóżmy, że $\sphericalangle CBA > \sphericalangle ACB$. Niech O oznacza środek okręgu opisanego na trójkącie ABC.

Wiemy, że proste OX oraz OY są symetralnymi odcinków odpowiednio AB oraz AC. Widzimy zatem, że $\sphericalangle OXA = \sphericalangle AYO = 90^\circ$, zatem punkty A, X, O, Y leżą na jednym okręgu.

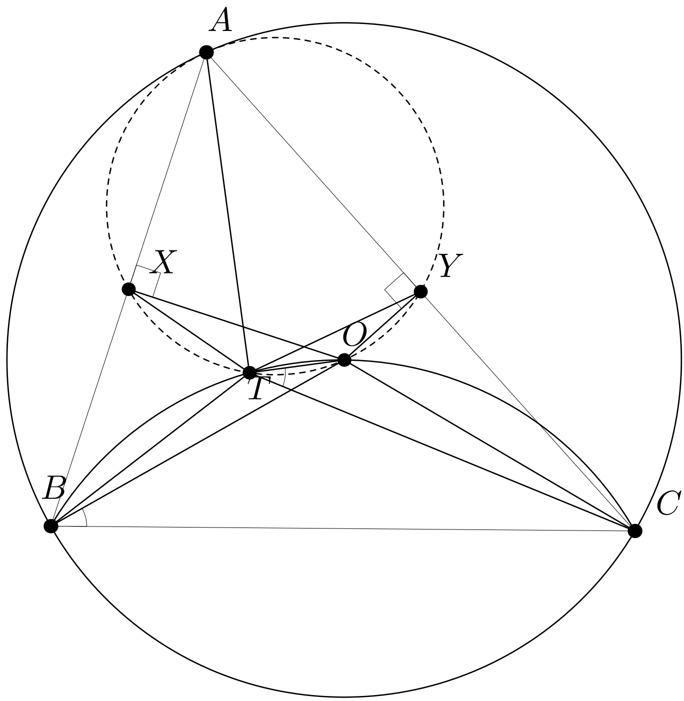
Aby uzasadnić, że punkt T również leży na wskazanym okręgu wystarczy wykazać, że $\sphericalangle OTA = 90^\circ$. Skoro

$$\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 120^\circ = \sphericalangle BTC,$$

to punkty T, B, C, O leżą na jednym okręgu. W takim razie na mocy twierdzenia o kącie wpisanym, uzyskujemy $\sphericalangle CTO = \sphericalangle CBO$. Skoro $\sphericalangle CBO = \sphericalangle OCB$ oraz $\sphericalangle BOC = 120^\circ$, to $\sphericalangle CBO = 30^\circ$. Mamy zatem

$$\begin{aligned}\sphericalangle OTA &= 360^\circ - \sphericalangle ATB - \sphericalangle BTC - \sphericalangle CTO \\ &= 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

co należało wykazać.



Sposób 2: Wykażemy, że trójkąty ABT i CTA są podobne na mocy cechy kąt–kąt–kąt. Oznaczmy $\sphericalangle TAC = \alpha$. Wówczas

$$\sphericalangle ACT = 180^\circ - \sphericalangle ATC - \sphericalangle TAC = 60^\circ - \alpha,$$

a także

$$\sphericalangle BAT = 60^\circ - \alpha,$$

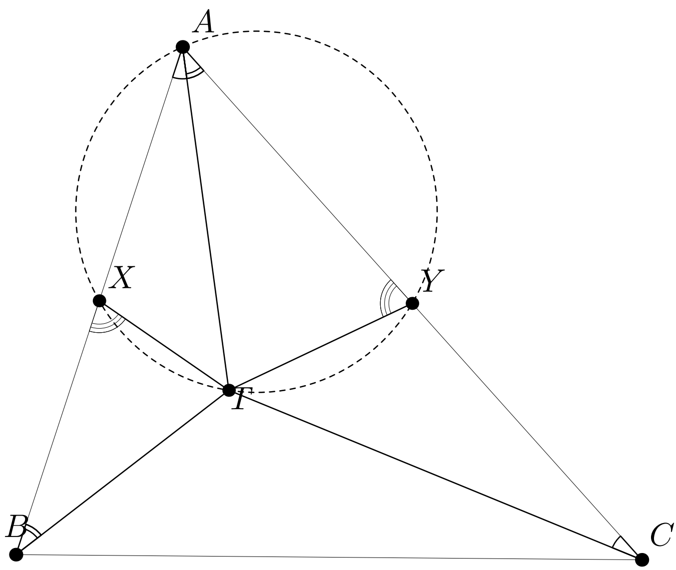
i wreszcie

$$\sphericalangle ABT = 180^\circ - \sphericalangle BTA - \sphericalangle TAB = \alpha.$$

Skoro punkt X to środek odcinka AB i punkt Y to środek odcinka AC, to z podobieństwa trójkątów ABT i CAT uzyskujemy, że

$$\sphericalangle BXT = \sphericalangle AYT.$$

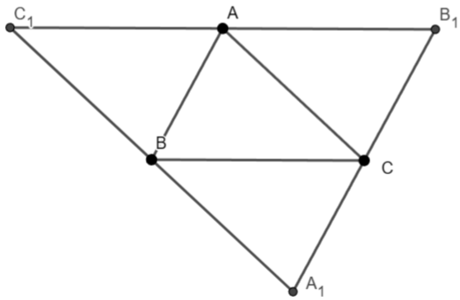
Zatem $\sphericalangle AXT + \sphericalangle AYT = 180^\circ$ co implikuje, że na czworokącie $AXTY$ można opisać okrąg.



5. Na płaszczyźnie dane jest n punktów. Każde trzy z danych punktów są wierzchołkami trójkąta o polu nie większym od 1. Udowodnij, że istnieje trójkąt o polu nie większym od 4, na zewnątrz którego nie znajduje się żaden z danych punktów.

Rozwiązanie:

Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Spośród wszystkich trójek punktów, wybieramy taką trójkę A, B, C, że trójkąt ABC ma maksymalne pole. Oznaczmy to pole przez S. Poprowadźmy teraz trzy proste równoległe do odpowiednich boków trójkąta, przechodzące przez odpowiednio punkty A,B i C. Otrzymujemy wówczas pewien trójkąt $A_1B_1C_1$ jak na rysunku, ograniczony przez te proste.



Zauważmy, że $[ABC_1] = [ABC]$, gdyż czworokąt CAC_1B jest równoległobokiem. Analogiczni uzyskujemy

$$[CB_1A] = [ABC] \quad \text{oraz} \quad [A_1CB] = [ABC].$$

Zatem $[A_1B_1C_1] = 4[ABC] \leqslant 4$.

Udowodnimy teraz, że trójkąt $A_1B_1C_1$ zawiera wszystkie n punktów. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje pewien punkt P, który nie leży wewnątrz tego trójkąta. Wówczas P leży po przeciwnej stronie co najmniej jednej z prostych A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, co punkty odpowiednio C_1, A_1, B_1. Bez straty ogólności przyjmijmy, że leży on po przeciwnej stronie prostej B_1C_1, niż punkt A_1. Wówczas jednak $[PBC] > [ABC]$, co jest niemożliwe. Zatem w trójkącie $A_1B_1C_1$ o polu nie większym niż 4 znajdują się wszystkie n punktów.

1. Dane są liczby niewymierne x, y. Udowodnij, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita a, że liczba $ax + y$ również jest niewymierna.

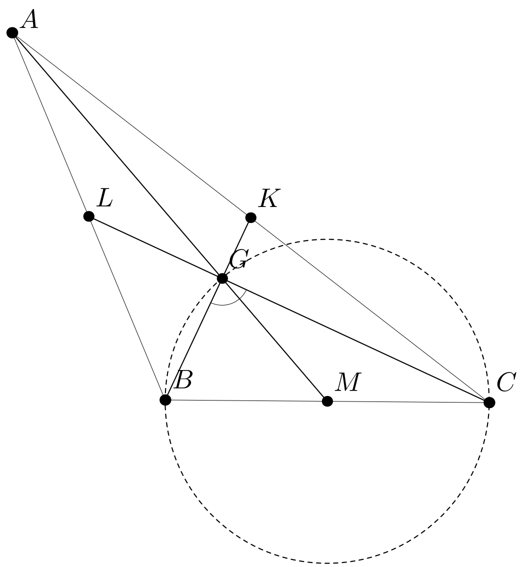
Rozwiązanie: Uzasadnimy, że co najmniej jedna z liczb $x+y$, $2x+y$ jest niewymierna. Załóżmy przeciwnie, że obydwie te liczby te są wymierne. Wtedy liczba

$$(2x + y) - (x + y) = x,$$

również musiałaby być wymierna, co przeczy założeniom zadania. Zatem jedna z liczb $a = 1$ lub $a = 2$ spełnia warunki zadania.

2. Punkty K, L są środkami odpowiednio boków AC, AB trójkąta ABC. Proste BK, CL przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że jeśli $AG = BC$, to $\sphericalangle BGC = 90^\circ$.

Rozwiązanie: Niech M oznacza środek boku BC. Oczywiście punkt M leży na prostej AG, a skoro G jest punktem wspólnym środkowych trójkąta ABC, to $AG = 2MG$. To oznacza, że $MB = MC = MG$, zatem G leży na okręgu o średnicy BC. W takim razie $\sphericalangle BGC = 90^\circ$.



3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite x, y, że liczba

$$k = \frac{x^2 + 3x + 1}{y^2}$$

jest całkowita. Udowodnij, że $k \geqslant 3$.

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że $k \leqslant 2$. Skoro liczby x, y są dodatnie, to również liczba k jest dodatnia. Mamy zatem dwie możliwości: $k = 1$ oraz $k = 2$. W przypadku gdy $k = 1$, dostajemy

$$y^2 = x^2 + 3x + 1.$$

Mamy jednak

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 < x^2 + 3x + 1 < x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2,$$

zatem $y^2 = x^2 + 3x + 1$ nie może być kwadratem liczby całkowitej — sprzeczność. W przypadku gdy $k = 2$, dostajemy

$$2y^2 = x^2 + 3x + 1.$$

Lewa strona tej równości jest podzielna przez 2, jednak prawa już nie, gdyż $x^2 + 3x = x(x + 3)$ jest liczbą parzystą jako iloczyn liczb przeciwnych parzystości. Otrzymane sprzeczności dowodzą, że $k \geqslant 3$.

4. Na tablicy napisano 16 parami różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych od 50. Udowodnij, że na tablicy są takie cztery parami różne liczby a, b, c, d, że $a + b = c + d$.

Rozwiązanie: Zauważmy, że spośród 16 liczb na tablicy można wybrać $\frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ par. Skoro każda liczba na tablicy jest większa od 0 i mniejsza od 50, to suma dowolnych dwóch liczb jest większa od 0 i mniejsza od 100 — sumy te mogą zatem przybierać jedną z 99 wartości.

Skoro jednak par jest więcej niż możliwych wartości sum, to możemy stwierdzić, że istnieją takie dwie różne pary (a, b), (c, d), że $a+b = c+d$. Gdyby się okazało, że jedna z liczb a, b jest równa jednej z liczb c, d, bez straty ogólności $a = c$, to z warunku $a + b = c + d$ dostajemy $b = d$, zatem pary te nie są różne. To oznacza, że liczby a, b, c, d są parami różne, zatem znalezione pary rzeczywiście żądaną własność.

5. Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite k, że dla dowolnej liczby całkowitej x, liczba

$$x^2 + 2kx + 1$$

jest kwadratem pewnej liczby całkowitej.

Rozwiązanie: Wykażemy, że jedynym rozwiązaniem jest $k = 1$. Liczba ta spełnia oczywiście warunki zadania, gdyż

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2,$$

co jest kwadratem liczby całkowitej dla dowolnej liczby całkowitej x.

Załóżmy teraz, że $k > 1$. Mamy

$$x^2 + 2kx + 1 < x^2 + 2kx + k^2 = (x+k)^2.$$

Skoro $x^2 + 2kx + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej mniejszym niż $(x+k)^2$, to dla dowolnej liczby całkowitej x zachodzi

$$x^2 + 2kx + 1 \leqslant (x+k-1)^2 = x^2 + 2(k-1)x + k^2 - 2k + 1.$$

Redukujemy wyrazy podobnie i dostajemy

$$2x \leqslant k^2 - 2k.$$

Widzimy jednak, że powyższa nierówność nie jest spełniona dla

$$x > \frac{k^2 - 2k}{2}.$$

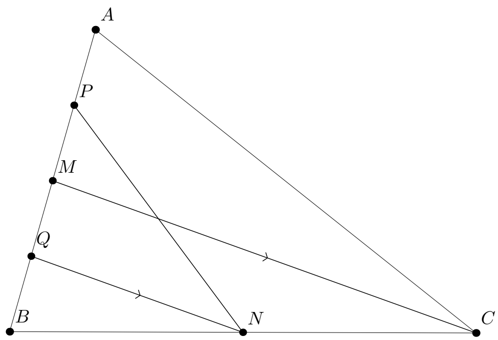
Otrzymana sprzeczność oznacza, że jedyną liczbą k spełniającą warunki zadania jest 1.

1. W grupie 24 uczniów każdy wysłał kartkę walentynkową dokładnie 12 innym uczniom. Udowodnij, że istnieje para uczniów A, B, którzy wysłali sobie nawzajem kartki, to znaczy: uczeń A wysłał kartkę uczniowi B i uczeń B wysłał kartkę uczniowi A.

Rozwiązanie: W obrębie grupy 24 uczniów jest dokładnie $\frac{24\cdot 23}{2} = 276$ różnych par osób, ponieważ każda osoba jest w 23 różnych parach i w każdej parze są 2 osoby. Wysłano natomiast łącznie $24 \cdot 12 = 288$ kartek walentynkowych. Każdą kartkę walentynkową przypiszmy do odpowiadającej jej pary osób. Wtedy pewnej parze musieliśmy przypisać dwie kartki, a stąd $288 > 276$. Jednak oznacza to, że osoby w tej parze musiały sobie wysłać nawzajem kartkę, co kończy dowód.

2. W trójkącie ABC punkty M i N to środki odpowiednio boków AB i BC. Punkt P jest środkiem odcinka AM. Udowodnij, że prosta CM połowi odcinek PN (połowi, czyli przecina odcinek w jego środku).

Rozwiązanie: Oznaczmy odbicie punktu P względem punktu M jako Q. Zauważmy, że punkt Q jest środkiem odcinka MB oraz punkt M jest środkiem odcinka PQ. Ma miejsce również równoległość prostych QN oraz MC, ponieważ QN to linia środkowa w trójkącie BMC. Zauważmy, że odcinek MC jest równoległy do odcinka QN oraz przechodzi przez środek boku PQ trójkąta PQN. Oznacza to, że prosta MC jest przedłużeniem linii środkowej w trójkącie PQN, zatem przechodzi przez środek boku PN, co należało wykazać.

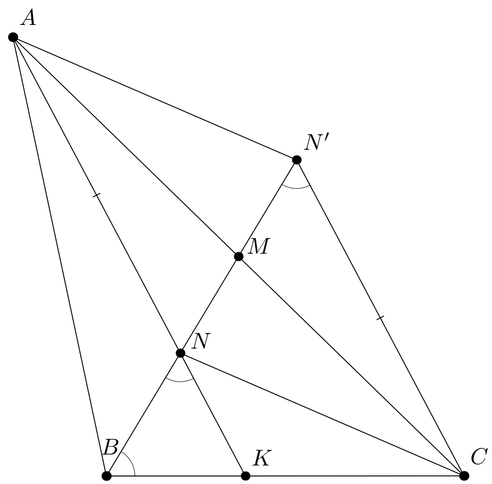


3. Czy istnieje taka liczba całkowita a, że suma cyfr a^{2024} wynosi 2024?

Rozwiązanie: Pokażemy, że taka liczba a nie istnieje. Załóżmy przeciwnie. Dodatnie liczby całkowite dają przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę, co ich suma cyfr. Skoro liczba 2024 daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to i taką resztę musiałaby dawać liczba a^{2024}. Znanym faktem jest, że kwadrat liczby całkowitej x nie daje reszty 2 przy dzieleniu przez 3. Możemy bowiem zapisać $x = 3k + r$, gdzie r jest resztą z dzielenia x przez 3, a k jest liczbą całkowitą. Wtedy $x^2 = 9k^2 + 6rk + r^2$, zaś liczba r^2 równa jest $0, 1$ lub 4. Dla $x = a^{1012}$ wnioskujemy, że liczba a^{2024} nie może dawać reszty 2 przy dzieleniu przez 3. Jest to sprzeczność z wcześniej uzyskanym stwierdzeniem.

4. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AC. Na prostej BM wybrano punkt N spełniający warunek $AN = BC$, przy czym punkty B, N, M leżą na tej prostej właśnie w tej kolejności. Punkt K stanowi przecięcie prostej AN i odcinka BC. Udowodnij, że $BK = KN$.

Rozwiązanie: Niech N' będzie odbiciem punktu N względem punktu M. Wówczas czworokąt $ANCN'$ jest równoległobokiem, czyli mamy $AN = N'C$, zaś proste AN i CN' są równoległe. Trójkąt BCN' jest równoramienny, gdyż $N'C = BC$. Stąd $\sphericalangle NBK = \sphericalangle BN'C = \sphericalangle BNK$, zatem trójkąt BNK jest równoramienny, czyli $BK = KN$.



5. Wyznacz wszystkie pary liczb całkowitych (x, y), dla których

$$\begin{cases} x + y \neq 0, \\ \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = 6. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Przemnóżmy obie strony danej równości przez $x + y$. Dostajemy wtedy $x^2 + y^2 = 6x + 6y$. Przekształcamy otrzymaną równość równoważnie:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 18 &= 6x + 6y + 18 \\ (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) &= 18 \\ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 &= 18 \end{aligned}$$

Liczbę 18 możemy zapisać jako sumę kwadratów jedynie jako $9 + 9$, zatem liczba $x - 3$ jest równa -3 bądź 3, i analogiczne wartości przyjmuje liczba $y - 3$. Oznacza to, że uzyskane równanie spełniają 4 pary: $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(0, 6)$, $(6, 6)$. Jedynie pierwsza para nie spełnia warunków zadania, zatem właściwymi rozwiązaniami są pozostałe trzy pary.

1. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych równanie:

$$x^2 + y^2 + 1 = xy + x + y.$$

Rozwiązanie: Pomnóżmy obie strony równania przez 2. Mamy

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 2 &= 2xy + 2x + 2y \\ x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &= 0 \\ (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli suma trzech kwadratów jest równa zero, to skoro są to liczby nieujemne, każda z nich musi być równa 0. Innymi słowy

$$(x-y)^2 = 0, \quad (x-1)^2 = 0, \quad (y-1)^2 = 0,$$

skąd wynika, że $x = y = 1$. Bezpośrednio sprawdzamy, że uzyskana para liczb $(x, y) = (1, 1)$ spełnia wyjściowe równanie.

2. Rozstrzygnij, czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że zapis dziesiętny liczby

$$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$$

kończy się cyframi „10”.

Rozwiązanie: Każda liczba zakończona w systemie dziesiętnym cyframi „10” jest parzysta, lecz niepodzielna przez 4. Wobec tego dokładnie jeden z czynników $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$, $(d+a)$ rozpatrywanego iloczynu jest parzysty, a pozostałe trzy są nieparzyste. Zauważmy jednak, że liczba

$$(a+b) + (b+c) + (c+d) + (d+a) = 2(a+b+c+d)$$

jest nieparzysta, jako suma liczby parzystej i trzech liczb nieparzystych. Uzyskaliśmy sprzeczność: liczba postaci $2 \cdot x$ jest liczbą nieparzystą. Wnioskujemy stąd, że nie istnieją liczby a, b, c, d spełniające podany w treści zadania warunek.

3. Marek gra ze swoim kolegą w grę, w której obaj wykonują na zmianę ruchy. Na początku na stole leżą 43 karty. Ruch polega na zdjęciu ze stołu jednej, dwóch, trzech, lub czterech kart. Wygrywa ten z graczy, który zdejmie ostatnią kartę. Wiedząc, że grę rozpoczyna Marek, rozstrzygnij, który z graczy będzie mógł wygrać niezależnie od tego, jakie ruchy zrobi jego przeciwnik.

Rozwiązanie:

Rozważmy najpierw sytuację, w której liczba pozostałych kart po pierwszym ruchu jest podzielna przez 5. Załóżmy, że gracz A wykonuje wtedy swój ruch, a następnie gracz B. Zauważmy, że niezależnie od tego, ile kart weźmie w swoim ruchu gracz A, gracz B może wziąć taką liczbę kart, że po jego ruchu liczba kart na stole wciąż będzie podzielna przez 5 (gdy gracz A bierze jedną kartę, B bierze cztery, gdy A bierze dwie, B bierze trzy itd.). W szczególności, gdy na stole zostanie 5 kart, gracz B wygra, bo weźmie ostatnie karty.

Łatwo zauważyć, że Marek posiada strategię wygrywającą. W pierwszym ruchu bierze on 3 karty, co prowadzi do sytuacji opisanej wyżej (zostaje 40 kart, a liczba 40 jest podzielna przez 5), gdzie Marek jest graczem B.

4. Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych, które spełniają poniższy układ równań:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22 \end{cases}$$

Rozwiązanie:

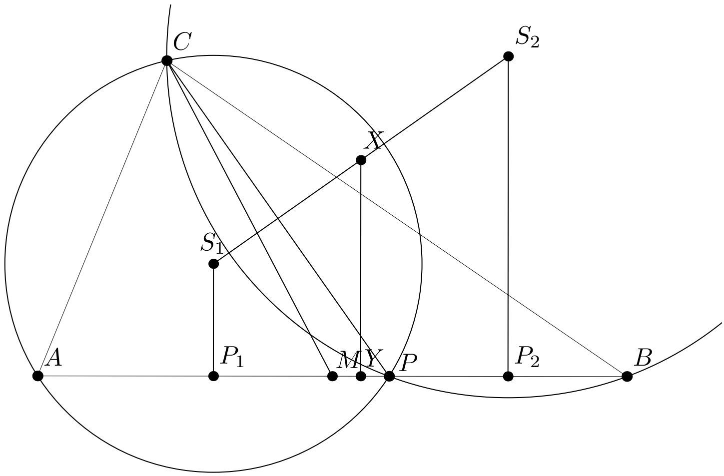
Drugie równanie mnożymy obustronnie przez 2 i odejmujemy stronami od pierwszego. W efekcie uzyskujemy

$$a^2 - 2a + b^2 - 4b + c^2 - 8c + 21 = 0,$$

co po skorzystaniu ze wzorów skróconego mnożenia zapisujemy w postaci $(a-1)^2+(b-2)^2+(c-4)^2 = 0$. Stąd wynika, że $a = 1, b = 2, c = 4$. Jednak bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że trójka ta nie spełnia danego układu równań. Układ ten nie ma zatem rozwiązań.

5. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ostrokątnego ABC. Punkt P leży na odcinku AB, a punkty S_1 i S_2 są środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach APC i BPC. Wykaż, że środek odcinka S_1S_2 leży na symetralnej odcinka CM.

Rozwiązanie: Dla $P = M$ prosta S_1S_2 jest symetralną odcinka CM. Załóżmy więc, że $P \neq M$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że punkt P leży na odcinku BM. Punkt S_1 jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie APC, więc leży on na symetralnej odcinka AP. Niech punkt P_1 będzie środkiem odcinka AP. Wtedy punkt P_1 jest rzutem prostokątnym punktu S_1 na odcinek AB. Analogicznie zdefiniujmy punkt P_2 jako środek odcinka BP.



Zauważmy, że $BM = AM$, więc $BP + 2PM = AM + PM$. Zatem $2P_2P + 2PM = 2PP_1$, a stąd $P_2P = MP_1$.

Oznaczmy przez X środek odcinka S_1S_2, a przez Y środek P_1P_2. Wtedy XY jest odcinkiem łączącym środki ramion trapezu $P_1S_1S_2P_2$, w takim razie musi być równoległa do jego podstaw i prostopadła do boku AB. Równość $P_2P = MP_1$ implikuje też, że punkt Y jest również środkiem odcinka PM, a zatem prosta XY jest symetralną tego odcinka.

Z drugiej strony prosta S_1S_2 jest symetralną odcinka CP. W takim razie jej środek X leży na symetralnych dwóch boków w trójkącie CPM, zatem musi leżeć także na symetralnej odcinka CM, co kończy dowód.

1. Rozstrzygnij, czy równanie $a^6+b^6+c^6+d^6=7^{2024}$ ma rozwiązanie w dodatnich liczbach całkowitych a, b, c, d.

Rozwiązanie: Zauważmy, że jeśli liczby A, B dają przy dzieleniu przez 7 odpowiednio reszty a, b to liczba AB daje taką samą resztę z dzielenia przez 7, co liczba ab, gdyż $(7k+a)(7l+b)=49kl+7(kb+la)+ab$. Stąd liczba A^6 daje przy dzieleniu przez 7 taką samą resztę, co liczba a^6. Zatem jeśli przy dzieleniu przez 7 liczba x daje resztę

- 0, to x^6 też daje resztę 0,
- 1, to x^6 daje tę samą resztę, co 1^6, czyli 1,
- 2, to x^6 daje tę samą resztę, co $2^6=64$, czyli 1,
- 3, to x^6 daje tę samą resztę, co $3^6=9^3$, a skoro 9 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 2, to 9^3 daje tę samą resztę, co 2^3, czyli 1,
- 4, to x^6 daje tę samą resztę, co $4^6=16^3$, a skoro 16 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 2, to jak wyżej 16^3 daje resztę 1,
- 5, to x^6 daje tę samą resztę, co $5^6=25^3$, a skoro 25 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 4, to 25^3 daje tę samą resztę co 4^3, czyli 1,
- 6, to x^6 daje tę samą resztę co $6^6=36^3$, a skoro 36 daje przy dzieleniu przez 7 resztę 1, to 36^3 daje tę samą resztę, co 1^3, czyli 1.

Udowodniliśmy, że każda całkowita postaci x^6 daje resztę 0 lub 1 przy dzieleniu przez 7. Stąd lewa strona wyjściowego równania może dawać resztę 0 przy dzieleniu przez 7 jedynie, gdy liczba 7 dzieli wszystkie z liczb a, b, c i d. Niech $7^{2024}=7^{6k+2}$, gdzie $k=337$. Wtedy

$$a^6+b^6+c^6+d^6=7^6a_1^6+7^6b_1^6+7^6c_1^6+7^6d_1^6=7^{6k+2}.$$

gdzie a_1, b_1, c_1, d_1 to ilorazy liczb a, b, c, d przez 7^6. Równoważnie:

$$a_1^6+b_1^6+c_1^6+d_1^6=7^{6(k-1)+2}.$$

Powtarzając k razy operację redukowania wykładnika, otrzymamy że $7^6(a_k+b_k+c_k+d_k)=7^2$, co jest niemożliwe, ponieważ $7^6>7^2$. Stąd nie istnieją liczby całkowite a, b, c, d spełniające wyjściowe równanie.

2. Dana jest liczba całkowita N. Jeżeli liczba ta jest podzielna przez 5, to Maciek dzieli ją przez 5, w przeciwnym wypadku dodaje do niej 3. Maciek powtarza tę operację, dopóki nie otrzyma liczby 1. Rozstrzygnij, dla jakich liczb N Maciek nigdy nie uzyska liczby 1.

Rozwiązanie: Udowodnimy, że rozpoczynając od liczby N podzielnej przez 3, Maciek nigdy nie otrzyma 1. Zauważmy, że jeśli Maciek operuje na liczbie podzielnej przez 3, to w wyniku dowolnej operacji otrzyma on ponownie liczbę podzielną przez 3. Oznaczmy liczbę, na której operuje Maciek, jako $3k$.

Jeśli liczba $3k$ jest podzielna przez 5, to dzielimy przez 5, usuwając jedną piątkę z rozkładu liczby $3k$ na czynniki pierwsze, nie zmieniając podzielności przez 3. W przeciwnym przypadku powiększamy liczbę $3k$ o 3, uzyskując oczywiście liczbę podzielną przez 3. W wyniku takich operacji nie możemy dostać liczby 1, gdyż nie jest ona podzielna przez 3.

Załóżmy, że liczba N nie jest podzielna przez 3. Jeżeli N jest liczbą niedodatnią, to każda operacja Maćka zwiększa tę liczbę; zatem po pewnej liczbie operacji dojdziemy do liczby dodatniej.

Dalej będziemy rozważać tylko $N > 0$. Rozważmy najmniejszą liczbę N taką, z której nie można za pomocą pewnej liczby operacji dotrzeć do 1. Liczba ta nie może być podzielna przez 5, bo dzielenie przez 5 liczby niepodzielnej przez 3 daje liczbę niepodzielną przez 3, której również nie można sprowadzić do liczby 1, co przeczy minimalności N. Przypuśćmy więc, że liczba N nie jest podzielna przez 5, zatem jest w jednej z postaci

$$5k + 1,\ 5k + 2,\ 5k + 3,\ 5k + 4.$$

W każdym z tych przypadków można za pomocą operacji dodawania kilkakrotnie liczby 3 dojść do liczby podzielnej przez 5, uzyskując liczby $5k + 5$ lub $5k + 10$. Procedura nakazuje podzielić te liczby przez 5, uzyskując $k + 1$ lub $k + 2$. Liczby te są jednak mniejsze niż N, więc z nich również nie możemy otrzymać liczby 1, zgodnie z założeniem o liczbie N.

Otrzymana sprzeczność oznacza, że z każdej liczby niepodzielnej przez 3 można dojść, za pomocą pewnej liczby operacji, do liczby 1.

3. Dany jest czworokąt $ABCD$ spełniający $AB = BC = CD$. Wiadomo też, że $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ i $\sphericalangle BCD = 150^\circ$. Znajdź miary pozostałych dwóch kątów wewnętrznych czworokąta $ABCD$.

Rozwiązanie: Dorysujmy taki punkt X, aby czworokąt $ABCX$ był kwadratem. Zauważmy, że

$$\sphericalangle XCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCX = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

Skoro $CX = CD$ oraz $\sphericalangle XCD = 60^\circ$, to trójkąt XCD jest równoboczny. Z tego wynika również, że

$$\sphericalangle AXD = 150^\circ = 90^\circ + 60^\circ.$$

Ponieważ trójkąt AXD jest równoramienny, to

$$\sphericalangle DAX = \sphericalangle XDA = \frac{180^\circ - \sphericalangle AXD}{2} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ,$$

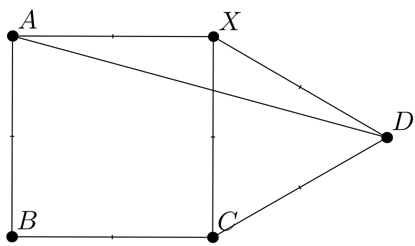
a więc

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle XAB - \sphericalangle XAD = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

oraz

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle XDC - \sphericalangle XDA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Szukane kąty mają więc miary 75° oraz 45°.



4. Dany jest okrąg ω oraz jego cięciwa AB, niebędąca jego średnicą. Wybieramy punkt C na dłuższym łuku AB tego okręgu. Symetralna odcinka BC przecina okrąg w dwóch różnych punktach X i Y. Niech P i Q będą takimi punktami na prostej AC, że proste PX oraz QY są prostopadłe do prostej AC. Wykaż, że długość odcinka PQ zależy tylko od długości odcinka AB.

Rozwiązanie: Oznaczmy punkt przecięcia symetralnej odcinka BC z odcinkiem XY jako D. Zauważmy, że symetralna dowolnej cięciwy okręgu przechodzi przez jego środek, więc jest jego średnicą. Oznaczmy również dwa nowe punkty: punkt przecięcia prostych YQ oraz BC jako F oraz różny od Y punkt przecięcia prostej YQ z okręgiem ω jako G.

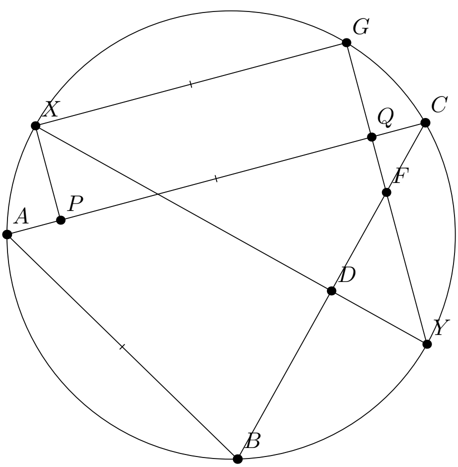
Skoro trójkąt CFQ jest prostokątny, to $\sphericalangle CFQ = 90^\circ - \sphericalangle ACB$. Zauważmy też, że $\sphericalangle CFQ = \sphericalangle DFY$, ponieważ są to kąty wierzchołkowe. Analogicznie, ponieważ trójkąt DFY jest prostokątny, to

$$\sphericalangle DYF = 90^\circ - \sphericalangle DFY = \sphericalangle ACB.$$

Skoro kąty oparte na łukach AB i GX są równe, to odpowiadające im cięciwy AB i GX muszą być równej długości. Zauważmy, że

$$\sphericalangle XGY = 90^\circ = \sphericalangle GQP = \sphericalangle XPQ,$$

zatem odcinek XY jest średnicą okręgu ω. Oznacza to, że czworokąt $XPQG$ jest prostokątem. Zatem $PQ = XG = AB$, co kończy dowód.



5. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, c, dla których nie istnieje liczba całkowita $d > 1$ dzieląca zarówno a i b. Dla jakich liczb całkowitych n wartość wyrażenia

$$\frac{a^2 + ab + bc + an}{a + b}$$

jest liczbą całkowitą?

Rozwiązanie: Zauważmy, że zachodzą następujące równości

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + ab + bc + an}{a + b} &= \frac{a^2 + ab + bc + ac + a(n - c)}{a + b} \\ &= \frac{(a + b)(a + c) + a(n - c)}{a + b} \\ &= (a + c) + \frac{a(n - c)}{a + b}. \end{aligned}$$

Ponieważ liczby a i b są względnie pierwsze, więc liczby $a + b$ i a też są względnie pierwsze. Gdyby istniał wspólny dzielnik liczb $a + b$ i a, to dzieliłby on też $a + b - a = b$, co jest sprzeczne z założeniami zadania. W takim razie liczby a i $a + b$ są względnie pierwsze.

Rozważany ułamek jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{a(n - c)}{a + b}$$

jest liczbą całkowitą, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $a(n - c)$ jest podzielna przez $a + b$. Skoro jednak liczby a i $a + b$ są względnie pierwsze, to powyższy warunek podzielności jest równoważny z podzielnością liczby $n - c$ przez liczbę $a + b$. W takim razie możemy zapisać

$$n - c = k(a + b),$$

dla pewnej liczby całkowitej k. W rezultacie, liczby n spełniające warunki zadania to $(a + b) \cdot k + c$, dla każdej liczby całkowitej k.

1. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p i q, dla których

$$p^2 - 2q^2 = 1.$$

Rozwiązanie: Zapisujemy równanie w postaci $p^2 - 1 = 2q^2$ i wnioskujemy stąd, że liczba $p^2 - 1$ jest parzysta. W szczególności $p \neq 2$. Co więcej, liczba

$$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$$

jest podzielna przez 4, jako iloczyn dwóch liczb parzystych. Z tego wynika, że $q = 2$, gdyż w przeciwnym przypadku prawa strona nie byłaby podzielna przez 4. Para $(p, q) = (3, 2)$ spełnia warunki zadania.

2. Bartek rozstawił 777 białych króli na szachownicy rozmiaru 999×999 (przy czym na jednym polu może być co najwyżej jeden król) tak, że żaden król nie stoi na brzegu szachownicy ani w jej rogu. Wykaż, że Bartek ma teraz parzyście wiele możliwości na zrobienie jednego ruchu jednym z 777 rozstawionych króli.

Uwaga: Król szachowy jest taką figurą, która ze swojego pola może się ruszyć na każde pole, które ma z tym (wyjściowym) polem wspólną krawędź lub róg.

Rozwiązanie: Liczba wszystkich ruchów, które może zrobić Bartek równa jest różnicy liczby $777 \cdot 8$ i liczby L, (każdy król może się ruszyć w ośmiu kierunkach, bo nie może stać przy krawędzi) gdzie L jest liczbą ruchów "zakazanych", to znaczy takich, gdzie pewien król A ruszyłby się na pole, na którym już jest inny król B. Jednak wtedy król B nie może ruszyć się na pole, na którym jest król A.

Zatem ruchy "zakazane" możemy ze sobą dobrać w pary, stąd ich liczba musi być parzysta. Jednak $777 \cdot 8$ jest liczbą parzystą jako iloczyn liczby parzystej i nieparzystej. W rezultacie łączna liczba możliwych ruchów jest parzysta, jako różnica dwóch liczb parzystych, co należało dowieść.

3. Dany jest równoległobok $ABCD$, gdzie $AB < AD$. Niech E będzie takim punktem na prostej BC, różnym od punktu B, że $CE = BC$. Niech F będzie takim punktem na prostej AD, że $DF = DC$, przy czym zakładamy, że punkt F nie leży na odcinku AD. Wreszcie, niech G będzie takim punktem na prostej EF, że $\sphericalangle GBA = \sphericalangle GBC$, przy czym zakładamy, że punkt G leży wewnątrz kąta $\sphericalangle ABC$. Wykaż, że środek odcinka BG leży na prostej AD.

Rozwiązanie: Zauważmy, że punkt E leży na półprostej BC, ale nie na odcinku BC, zaś punkt F leży na półprostej AD, gdyż w przeciwnym wypadku $FD > DA > DC = FD$, co jest absurdem. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle CDF = \sphericalangle DCF + \sphericalangle CFD = 2\sphericalangle DCF,$$

na mocy równości miar kątów naprzemianległych oraz tego, że DCF jest trójkątem równoramiennym. Zatem $\sphericalangle FCE = \frac{\sphericalangle DCE}{2}$. Stąd

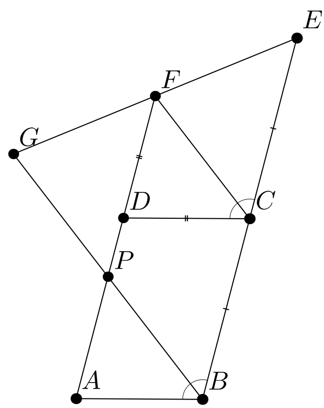
$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABG + \sphericalangle GBC = 2\sphericalangle GBC,$$

i w rezultacie $\sphericalangle FCE = \sphericalangle GBC = \frac{\sphericalangle DCE}{2}$. W takim razie $GB \parallel FC$.

Niech P będzie punktem przecięcia prostych BG oraz AD. Skoro proste GB oraz FC są równoległe, to czworokąt $PFCB$ jest równoległobokiem. To z kolei oznacza, że $PF = BC$. W takim razie, na mocy twierdzenia Talesa, mamy

$$\frac{GP}{GB} = \frac{PF}{BE} = \frac{PF}{2BC} = \frac{1}{2}$$

zatem P jest środkiem odcinka GB, co jest równoważne z tezą.



4. Rozwiąż równanie

$$2(q^2 - p^2)(q^2 - r^2) = 27pqr$$

wiedząc, że p, q, r są liczbami pierwszymi.

Rozwiązanie: Zauważmy, że liczby q oraz p muszą być różne — w przeciwnym wypadku lewa strona równania byłaby równa 0, natomiast prawa strona nie może być równa 0. Tak samo uzasadniamy, że liczby q i r muszą być różne.

Skoro prawa strona jest wielokrotnością q, to lewa strona też musi być podzielna przez q. Gdyby liczba $q^2 - p^2$ była podzielna przez q, to podzielna przez q byłaby również liczba

$$q \cdot q - (q^2 - p^2) = p^2,$$

gdyż różnica wielokrotności danej liczby również jest jej wielokrotnością. Jednak jedyny dzielnik pierwszy liczby p^2 to p. Stąd mielibyśmy $p = q$, co jak już ustaliliśmy jest niemożliwe. Podobnie uzasadniamy, że liczba $(q^2 - r^2)$ nie jest podzielna przez q. W takim razie liczba2 musi być podzielna przez q, zatem $q = 2$. Po podstawieniu i podzieleniu przez 2, uzyskujemy

$$(p^2 - 4)(r^2 - 4) = 27pr.$$

Dalszą część rozwiązania możemy przeprowadzić na dwa sposoby.

Sposób I

Prawa strona równania wyżej jest wielokrotnością p, zatem lewa też. Gdyby liczba $p^2 - 4$ była podzielna przez p, to 4 musiałoby być podzielne przez p, zatem $p = 2 = q$, co jak już ustaliliśmy jest niemożliwe. Zatem liczba $r^2 - 4 = (r - 2)(r + 2)$ jest podzielna przez p. To oznacza, że jedna z liczb $r - 2$ lub $r + 2$ jest podzielna przez p. Obie te liczby są dodatnie, bo $r \neq q$, zatem $r + 2 \geqslant p$ lub $r - 2 \geqslant p$. Jednak i w tym drugim przypadku zachodzi $r + 2 \geqslant r - 2 \geqslant p$; zatem zawsze $r + 2 \geqslant p$. Analogicznie możemy dojść do wniosku $p + 2 \geqslant r$. Zatem $r + 2 \geqslant p \geqslant r - 2$. $r \neq 2$. W rezultacie liczby $r + 1$ oraz $r - 1$ są parzyste; skoro jednak $p \neq q$, to $p \neq 2$, zatem p może być jedynie równe $r - 2$, r lub $r + 2$. Wykażemy, że drugi przypadek nie może mieć miejsca.

W przypadku $p = r$, mielibyśmy

$$(r^2 - 4)^2 = 27r^2.$$

Jednak rozważając rozkład na czynniki pierwsze obu stron widzimy, że po lewej stronie krotność liczby 3 w rozkładzie na czynniki pierwszej jest parzysta liczba "trójek" (gdyż jest to krotność w rozkładzie kwadratu), natomiast po prawej mamy w rozkładzie parzyście wiele wystąpień liczby 3 pochodzących z rozkładur^2 oraz trzy wystąpienia pochodzące z rozkładu 27. Jest to niemożliwe, gdyż krotność występowania 3 w rozkładzie na czynniki obydwu stron musi być jednakowa.

Pozostało rozważyć przypadki, gdy $p = r - 2$ lub $p = r + 2$. Obydwa przypadki te są do siebie symetryczne (gdyż p i r są symetryczne), gdyż w pierwszym mamy $r = p + 2$. Wystarczy więc rozpatrzyć $p = r + 2$. Wtedy

$$\begin{gathered}((r+2)^2 - 4)(r^2 - 4) = 27r^2 \\ (r^2 + 4r)(r+2)(r-2) = 27r(r+2) \\ (r+4)(r-2) = 27,\end{gathered}$$

zatem liczba $r + 4$ jest równa 27, 9, 3 lub 1. Jednak zarówno liczba r, jak i liczba $r + 2$ musi być pierwsza. Zatem pozostaje tylko przypadek $r + 4 = 9$, czyli $r = 5$, $p = 7$. Trójka $(p, q, r) = (7, 2, 5)$ spełnia wyjściowe równanie. Zatem rozwiązania to $(p, q, r) = (7, 2, 5)$ oraz $(p, q, r) = (5, 2, 7)$.

Sposób II
Zauważmy, że

$$r^2 - 4 - 6r = (r-3)^2 - 13$$

jest liczbą większą od 0 dla $r - 3 \geqslant 4$, czyli dla $r \geqslant 7$. Analogicznie $p^2 - 4 - 6r \geqslant 0$. Gdybyśmy mieli zarówno $r \geqslant 7$, jak i $p \geqslant 7$, to wtedy $r^2 - 4 > 6r$ oraz $p^2 - 4 > 6p$. Wówczas

$$(r^2 - 4)(p^2 - 4) > 36rp,$$

co jest sprzeczne z zadanym równaniem. Zatem $r < 7$ lub $p < 7$. Bez straty ogólności przyjmijmy $r < 7$. Wtedy $r = 2$, $r = 3$ lub $r = 5$. Rozważmy te przypadki. Dla $r = q$ dostajemy oczywistą sprzeczność.

Niech $r = 3$. Wtedy

$$5(p^2 - 4) = 81p$$

Skoro lewa strona jest wielokrotnością 5, to prawa musi być podzielna przez 5. Jednak liczba 81 nie jest podzielna przez 5, zatem p musi być podzielna przez 5, czyli w istocie $p = 5$. Wtedy jednak zadana równość nie zachodzi, gdyż $5 \cdot 21 < 81 \cdot 5$.

Pozostał przypadek $r = 5$. Wtedy

$$21 \cdot (p^2 - 4) = 135p$$

Lewa strona jest wielokrotnością liczby 7, zatem prawa strona musi być podzielna przez 7. Stąd liczba p musi być podzielna przez 7, skoro liczba 135 nią nie jest. W rezultacie $p = 7$. Bezpośrednie sprawdzenie potwierdza, że trójka $(p, q, r) = (7, 2, 5)$ spełnia warunki zadania. Zatem także trójka $(p, q, r) = (5, 2, 7)$ również spełnia warunki zadania. Są to zatem jedyne rozwiązania zadanego równania.

5. Danych jest 100 dodatnich liczb całkowitych nie większych niż 100, których suma wynosi 200. Udowodnij, że można tak wybrać pewne spośród tych liczb, aby ich suma była równa 100.

Rozwiązanie: Oznaczmy dane 100 liczb przez a_1, a_2, ..., a_{100}, przy czym załóżmy, że a_1 jest najmniejszą, a a_2 największą z nich. Jeżeli $a_2 = a_1$, to wszystkie dane liczby muszą być sobie równe. Wtedy jednak wszystkie są równe 2 i suma dowolnych 50 z nich spełnia warunki zadania. Dla $a_2 \neq a_1$ rozważmy liczby $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ oraz a_2. Są one parami różne, gdyż

$$a_1 < a_2 < a_1 + a_2 < \cdots < a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$$

Skoro liczb tych jest 101, to pewne dwie z nich muszą dawać tę samą resztę przy dzieleniu przez 100. W szczególności rozważane liczby są dodatnie i nie większe niż 200, zatem wybrane dwie liczby muszą różnić się o dokładnie 100. Skoro $a_2 < 100$, to ta większa z nich musi być postaci $a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Jeżeli mniejsza z wybranych liczb jest równa a_2, to $a_1 + a_3 + \cdots + a_i = 100$, co kończy dowód. Jeżeli zaś mniejsza z tych liczb jest postaci $a_1 + a_2 + \cdots + a_j$, to $a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots + a_i = 100$, co kończy dowód. Zatem zawsze możliwe jest wybranie spośród danych liczb podzbioru o sumie elementów równej 100.