



**XI CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE
ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW**

Zawody indywidualne
15 maja 2023 r.

Zadanie 1. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = 2 \cdot AC$. Punkt M jest środkiem boku BC , a punkt D leży na odcinku AB , przy czym $AD = 2 \cdot BD$. Wykaż, że proste AM oraz MD są prostopadłe.

Zadanie 2. Dla dodatniej liczby całkowitej n przez $d(n)$ oznaczmy liczbę dodatnich dzielników liczby n . Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których $d(n)$ jest drugim największym dzielnikiem liczby n .

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt P znajduje się wewnątrz tego trójkąta i leży na dwusiecznej kąta BAC . Przypuśćmy, że punkt przecięcia wysokości H trójkąta ABP znajduje się wewnątrz trójkąta ABC . Niech Q będzie przecięciem prostej AP oraz prostej prostopadłej do AC przechodzącej przez H . Wykaż, że Q jest punktem symetrycznym do P względem prostej BH .

Zadanie 4. Każde pole tablicy $n \times n$ zostało pomalowane albo na czerwono, albo na niebiesko, przy czym spełnione są następujące warunki:

- jeżeli wiersz i kolumna zawierają tę samą liczbę czerwonych pól, to pole na ich przecięciu jest czerwone;
- jeżeli wiersz i kolumna zawierają różne liczby czerwonych pól, to pole na ich przecięciu jest niebieskie.

Wykaż, że łączna liczba niebieskich pól jest parzysta.

Zadanie 5. Bartek cierpliwie wykonuje operacje na ułamkach. W każdym ruchu do aktualnego wyniku dodaje jego odwrotność, otrzymując nowy wynik. Bartek rozpoczyna od liczby 1: po pierwszym ruchu otrzymuje więc wynik 2, po drugim ruchu wynik $\frac{5}{2}$, po trzecim: $\frac{29}{10}$ itd. Po 300 ruchach Bartek otrzymał wynik x . Wyznacz największą liczbę całkowitą nie większą od x .

*Czas: 3 godziny 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 5 punktów.*