Zadanie 1. Początkowo na tablicy napisane są liczby 1 oraz 2. *Ruch* polega na wyborze dodatniej liczby rzeczywistej x i zastąpieniu pary (a, b) liczb napisanych na tablicy parą

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right).$$

Czy można (w skończenie wielu ruchach) doprowadzić do sytuacji, w której dwiema liczbami napisanymi na tablicy są 2 oraz 3?

Rozwiązanie 1. Zauważmy, że na początku stosunek napisanych na tablicy liczb jest równy $2 : 1$. Po wybraniu dowolnego $x > 0$ i zamianie liczb $a, b = 2a$ na

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right) = \left(a + \frac{x}{2a}, 2a + \frac{x}{a}\right) = \left(a + \frac{x}{2a}, 2\left(a + \frac{x}{2a}\right)\right),$$

stosunek pozostaje dalej równy $2 : 1$. W takim razie nie da się doprowadzić do sytuacji, w której na tablicy będą napisane liczby 2 i 3, ponieważ ich stosunek jest inny.

Zadanie 2. Ile jest niepustych podzbiorów zbioru $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 11\}$ o tej własności, że iloczyn wszystkich elementów podzbioru jest sześcianem liczby całkowitej?

Rozwiązanie 2. Zauważmy, że jeśli iloczyn liczb z wybranego podzbioru będzie podzielny przez liczbę pierwszą większą od 3, to nie będzie podzielny przez sześcian tej liczby pierwszej, a więc nie będzie sześcianem. W takim razie w szukanych podzbiorach nie mogą wystąpić liczby 5, 10, 7, 11. Liczby 1 oraz 8 możemy dodawać do naszego podzbioru niezależnie od pozostałych, ponieważ są sześcianami. Rozważmy więc zbiór $\{2, 3, 4, 6, 9\}$. Jeśli do rozważanego podzbioru weźmiemy liczbę 6, to iloczyn elementów z podzbioru musi w rozkładzie na czynniki pierwsze mieć dokładnie 3 dwójki i 3 trójki, co jest możliwe tylko w podzbiorze $\{4, 6, 9\}$. Jeśli do rozważanego podzbioru nie weźmiemy liczby 6, to ze względu na podzielność prez 2 i przez 3 liczby 2 i 4 oraz 3 i 9 muszą występować w nim jednocześnie. W takim razie otrzymujemy cztery możliwości: $\{2, 4\}, \{2, 4, 3, 9\}, \{3, 9\}$ oraz zbiór pusty.

W takim razie mamy 5 możliwości wybrania odpowiedniego podzbioru ze zbioru $\{2, 3, 4, 6, 9\}$. Uwzględniając możliwość dodania liczb 1 i 8 do każdej z nich otrzymujemy $5 \cdot 4 = 20$ możliwych podzbiorów, w tym zbiór pusty. Szukana liczba niepustych podzbiorów jest równa 19.

Zadanie 3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = BD = DC$ oraz $AB \perp BD \perp DC$. Punkt M jest środkiem boku BC. Wykaż, że $\measuredangle BAM + \measuredangle DCA = 45°$.

Rozwiązanie 3. Z warunków zadania wynika, że ABD i CBD są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi, a stąd czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem o kątach 45° i 135°.

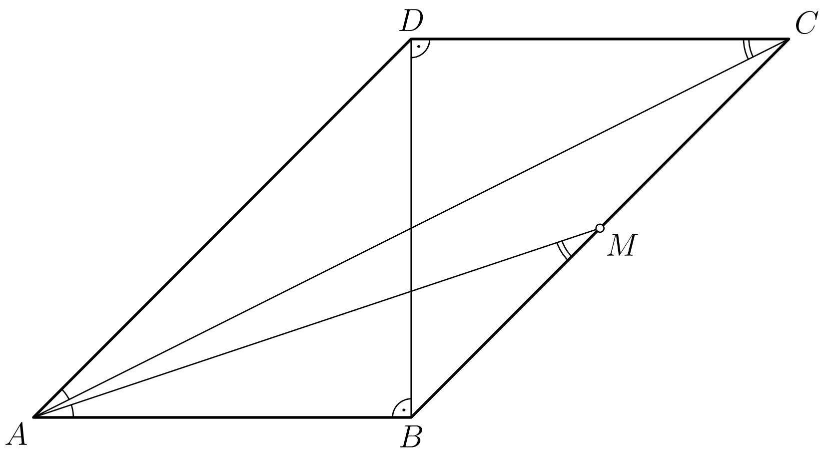
Oznaczmy długość odcinków AB, BD i DC przez a. Wówczas $BC = AD = a\sqrt{2}$ oraz $BM = MC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trójkąty ABM i ADC są podobne, ponieważ mają jednakowe kąty rozwarte $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ADC = 135°$ oraz

$$AB : BM = a : \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2} : a = AD : DC.$$

W takim razie $\sphericalangle DCA = \sphericalangle BMA$, a stąd

$$\sphericalangle BAM + \sphericalangle DCA = \sphericalangle BAM + \sphericalangle BMA = 180° - \sphericalangle ABM = 180° - 135° = 45°.$$



Zadanie 4. Liczby całkowite a, b, c spełniają warunki $a+b+c=1$ oraz $ab+bc+ca < abc$. Wykaż, że

$$ab + bc + ca < 2abc.$$

Rozwiązanie 4. Jeśli $abc \geqslant 0$, to również $2abc \geqslant abc > ab + bc + ca$, więc teza jest spełniona.

Przypuśćmy więc, że $abc < 0$. Wszystkie trzy liczby a, b, c nie mogą być ujemne, ponieważ ich suma nie mogłaby być wtedy równa 1, więc dokładnie jedna z liczb a, b, c jest ujemna. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $c < 0$, wtedy $a, b > 0$.

Podstawmy $c = 1 - (a + b)$ do założenia $ab + bc + ca < abc$. Otrzymujemy

$$ab + (1 - (a + b))(a + b) = ab + c(a + b) = ab + bc + ca < abc = ab(1 - (a + b)),$$

co po odjęciu ab z obu stron sprowadza się do nierówności

$$(1 - (a + b))(a + b) < -ab(a + b),$$

i po dalszych przekształceniach do

$$(a - 1)(b - 1)(a + b) < 0.$$

To jednak nie jest możliwe (mamy $a + b > 0$, $a, b \geqslant 1$). W takim razie z założeń zadania wynika $abc \geqslant 0$, a to daje nam tezę.

Zadanie 5. Dla dodatniej liczby całkowitej n oznaczmy przez $S(n)$ sumę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą n, dla której spełniona jest równość $4 \cdot S(n) = 3 \cdot S(2n)$.

Rozwiązanie 5. Z równości $4 \cdot S(n) = 3 \cdot S(2n)$ wynika, że $S(n)$ jest podzielne przez 3. W takim razie z cechy podzielności przez 3 uzyskujemy również, że liczba n jest podzielna przez 3. Stąd również $2n$ jest podzielna przez 3, a co za tym idzie – przez 3 dzieli się też $S(2n)$. W takim razie prawa strona równości $4 \cdot S(n) = 3 \cdot S(2n)$ dzieli się przez 9, a stąd $S(n)$ jest podzielne przez 9. Podobnie jak poprzednio możemy wywnioskować stąd, że przez 9 jest podzielne również n, $2n$ i $S(2n)$. W takim razie prawa strona równości jest podzielna przez 27, a stąd lewa strona również, czyli $S(n)$ jest wielokrotnością liczby 27.

Rozważmy najpierw przypadek $S(n) = 27$. Z równości danej w zadaniu otrzymujemy wówczas $S(2n) = 36$. Gdyby liczba $2n$ miała co najwyżej 4 cyfry, to musiałaby składać się z czterech dziewiątek, co jest sprzeczne z jej parzystością. Rozważmy teraz najmniejsze parzyste liczby pięciocyfrowe o sumie cyfr 36. Najmniejszą taką liczbą jest 19998 i jest to jedyna taka liczba rozpoczynająca się cyfrą 1. Mamy wówczas $n = 19998 : 2 = 9999$, ale ta liczba ma sumę cyfr różną od 27 i nie spełnia warunków zadania. Kolejną możliwą wartością $2n$ jest 28998, skąd otrzymujemy $n = 14499$. Łatwo sprawdzić, że ta liczba spełnia warunki zadania.

Gdyby $S(n)$ było większe od 27, to $S(n) \geqslant 54$, a stąd n musiałoby mieć co najmniej 6 liczb i byłoby większe od znalezionej już wartości 14499. W takim razie 14499 jest najmniejszą liczbą spełniającą warunki określone w zadaniu.

Inne rozwiązanie (szkic). Rozważmy algorytm dodawania pisemnego liczb n i n. Analizując kolejne etapy dodawania można pokazać, że $S(2n) = 2 \cdot S(n) - 9k$, gdzie k oznacza liczbę cyfr liczby n większych od 4. Po wstawieniu tej zależności do równości z zadania, otrzymujemy $4 \cdot S(n) = 3 \cdot (2 \cdot S(n) - 9k)$, co po uproszczeniu daje $2 \cdot S(n) = 27k$.

W przypadku $S(n) = 27$ otrzymujemy $k = 2$. Szukamy jak najmniejszej liczby n, która ma dokładnie dwie cyfry większe od 4 i sumę cyfr równą 27. Nie może to być liczba czterocyfrowa, ponieważ jej suma cyfr nie przekraczałaby $2 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 26$. W takim razie szukana liczba ma pięć cyfr. Cyfry większe od 4 powinny być na miejscu dziesiątek i jedności oraz być możliwie jak największe (dzięki temu mniejsze będą cyfry na pozycjach o większej wartości), więc liczba n powinna kończyć się na 99. Pozostałe trzy cyfry muszą być mniejsze od 5 i mieć sumę równą 9. Ponownie dobieramy je w taki sposób, by cyfry na wcześniejszych pozycjach były jak najmniejsze. W ten sposób otrzymujemy, że najmniejszą liczbą spełniającą te warunki jest 14499.

W przypadku gdy $S(n) \neq 27$, mamy $S(n) \geqslant 54$, co oznaczałoby, że n ma co najmniej 6 cyfr. Taka liczba nie może być mniejsza od znalezionej wcześniej liczby. W takim razie 14499 jest najmniejszą liczbą n spełniającą warunki zadania.