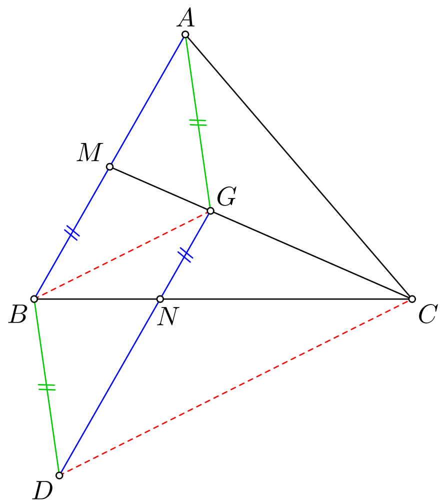
Zadanie 1. Punkt G jest punktem przecięcia środkowych trójkąta ABC. Punkt D jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $AGDB$. Udowodnij, że proste BG i CD są równoległe.

Rozwiązanie 1. Niech N będzie punktem przecięcia odcinków BC i GD. Skoro GN i MB są równoległe oraz $CG : CM = 2 : 3$ (z własności środkowych w trójkącie), to otrzymujemy $\frac{1}{3}BC = BN$ i $GN = \frac{2}{3}MB = \frac{1}{3}AB$. Wynika z tego również, że $CN = \frac{2}{3}BC$ oraz $DN = DG - NG = AB - \frac{1}{3}AB| = \frac{2}{3}AB$. W takim razie trójkąt CND jest obrazem trójkąta BNG w jednokładności o środku N i skali -2, z czego wynika równoległość BG i CD.



Inne rozwiązanie (szkic). Niech $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ. Mamy wówczas $[BCG] = \frac{1}{3}[ABC] = [ABG] = [DBG]$, co w połączeniu z faktem, że punkty C i D leżą po jednej stronie prostej BG, daje równoległość prostych BG i CD.

Zadanie 2. Wśród trójek (a, b, c) liczb całkowitych dodatnich spełniających

$$\left(a + 14\sqrt{3}\right)\left(b - 14c\sqrt{3}\right) = 2024$$

znajdź taką, dla której wartość a jest największa.

Rozwiązanie 2. Po przekształceniu warunku z zadania otrzymujemy, że trójka (a, b, c) musi spełniać równość

$$ab - 588c - 2024 = 14\sqrt{3}\,(ac - b).$$

Lewa strona jest liczbą wymierną, a $14\sqrt{3}$ jest liczbą niewymierną, stąd musi zachodzić $ac-b = 0$ oraz $ab-588c-2024 = 0$. Po wstawieniu $b = ac$ do ostatniej równości i prostych przekształceniach otrzymujemy

$$c(a^2 - 588) = 2024.$$

Skoro liczba a ma być największa, liczba c musi być najmniejsza możliwa. Dla $c = 1$ otrzymujemy $a^2 = 2612$, co daje niecałkowitą wartość a. Dla $c = 2$ mamy $a^2 = 1600$, a stąd $a = 40$ oraz $b = ac = 80$. W takim razie szukaną trójką jest $(40, 80, 2)$.

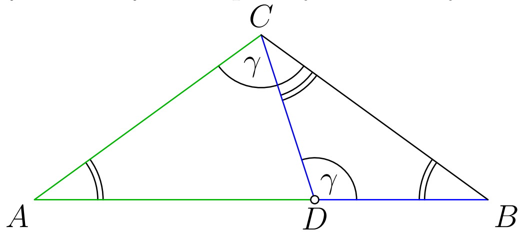
Zadanie 3. Wyznacz miary kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach równoramiennych, które można podzielić na dwa trójkąty równoramienne o rozłącznych wnętrzach.

Rozwiązanie 3. Przyjmijmy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = \alpha$ i $\sphericalangle ACB = \gamma$. Będziemy rozważać podział trojkąta na dwa trójkąty. Musi on przebiegać wzdłuż linii prostej przechodzącej przez jeden z wierzchołków trójkąta. Pokażemy, że jedynymi trójkątami spełniającymi warunki zadania są trójkąty o kątach $(45°, 45°, 90°)$, $(36°, 36°, 108°)$, $(72°, 72°, 36°)$ i $((540/7)°, (540/7)°, (180/7)°)$.

Rozważymy trzy przypadki w zależności od tego, jaka jest miara kąta γ:

(1) $\gamma = 90°$. W tej sytuacji trójkąt ma kąty $(45°, 45°, 90°)$ i możemy go podzielić na dwa trójkąty równoramienne wzdłuż wysokości z wierzchołka kąta prostego.

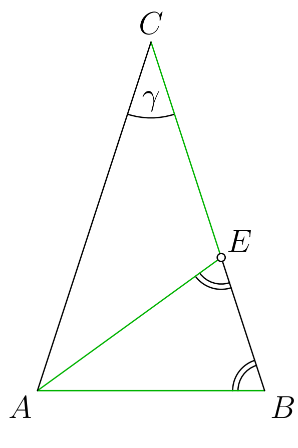
(2) $\gamma > 90°$. Linia cięcia musi przebiegać przez wierzchołek C. Oznaczmy przez D jej przecięcie z bokiem AB i bez straty ogólności załóżmy, że AD jest większe od DB (przypadek AD=BD jest sprzeczny, ponieważ trójkąt ACD jest wówczas trójkątem prostokątnym nierównoramiennym). Kąt CDB jest rozwarty, więc $CD = DB$ i trójkąt CDB ma takie same kąty jak trójkąt ACB, bo są to dwa trójkąty rozwartokątne równoramienne o wspólnym kącie ostrym. Stąd $\sphericalangle CDB = \gamma$. Ponadto mamy $AC = AD$, a stąd $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}(180° - (90° - \frac{1}{2}\gamma)) = 45° + \frac{1}{4}\gamma$. W takim razie $180° = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle BDC| = (45° + \frac{1}{4}\gamma) + \gamma$, a stąd $\gamma = 108°$, co daje drugie z wymienionych na początku rozwiązań.

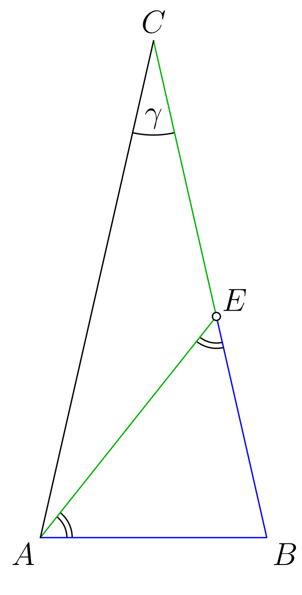


(3) $\gamma < 90°$. Linia cięcia nie może przebiegać przez wierzchołek C, ponieważ co najmniej jeden z powstałych trójkątów musiałby mieć kąt prosty lub rozwarty oraz kąt ostry większy od $45°$. Bez straty ogolności przyjmijmy, że linia cięcia przebiega przez A i przecina bok BC w punkcie E. Rozważymy dwa przypadki w zależności od tego, czy odcinek AE jest podstawą czy ramieniem w trójkącie ABE.

(a) AE jest ramieniem. Wówczas
$180° = \sphericalangle AEB + \sphericalangle AEC = (90° - \frac{1}{2}\gamma) + (180° - 2\gamma)$, i stąd $\gamma = 36°$,
co daje trzecie z rozwiązań,

(b) AE jest podstawą. wtedy
$180° = \sphericalangle AEB + \sphericalangle AEC = (45° + \frac{1}{4}\gamma) + (180° - 2\gamma)$, i stąd $\gamma = \frac{180}{7}°$,
co prowadzi do czwartego rozwiązania.





Zadanie 4. Ile jest dodatnich liczb całkowitych n mniejszych od 2024 i podzielnych przez $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$? Symbol $\lfloor x\rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Na przykład $n = 8$ spełnia dany warunek, gdyż 8 jest podzielne przez $\lfloor\sqrt{8}\rfloor - 1 = 2 - 1 = 1$, ale $n = 9$ go nie spełnia, gdyż 9 nie jest podzielne przez $\lfloor\sqrt{9}\rfloor - 1 = 2$.

Rozwiązanie 4. Oznaczmy $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ przez k. Liczba n może być zapisana w postaci $k^2 + z = (k-1)^2 + 2(k-1) + 1 + z$, gdzie $0 \leqslant z \leqslant 2k$. Z założenia $k - 1 \mid k^2 + z$ wynika $k - 1 \mid k^2 - 1 + z + 1$, czyli $k - 1 \mid z + 1$.

- Dla $k = 1$ nie ma rozwiązania.
- Dla $k = 2$ wszystkie $z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ spełniają warunek, co daje 5 rozwiązań.
- Dla $k = 3$ tylko parzyste $z \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ spełniają warunek z zadania, więc otrzymujemy kolejne 3 rozwiązania.
- Dla $k = 4$ wśród liczb $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ tylko z ze zbioru $\{2, 5, 8\}$ spełnia warunek o podzielności, więc mamy 3 rozwiązania.
- Dla $k > 4$ jest spełniona nierówność $3(k - 1) > 2k + 1 \geqslant z + 1$, więc mamy tylko 2 możliwości, aby $k - 1 \mid z + 1$:
  (1) $z + 1 = k - 1$, czyli $z = k - 2$. Wtedy $n = k^2 + k - 2$.
  (2) $z + 1 = 2k - 2$, czyli $z = 2k - 3$. Wtedy $n = k^2 + 2k - 3$.
  W obu przypadkach spełniony jest warunek $z \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$, a maksymalne k, dla którego $n < 2024$ to 44, więc mamy $k \in \{5, 6, \ldots, 44\}$, czyli 40 możliwości.

Łącznie mamy $5 + 3 + 3 + 40 + 40 = 91$ szukanych liczb n.

Zadanie 5. Czy istnieje taka liczba naturalna $n \geqslant 1$, że cyfry zapisu dziesiętnego liczby 2^n zapisane w odwrotnej kolejności tworzą zapis innej całkowitej potęgi liczby 2? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie 5. Nie. Obie liczby mają tę samą liczbę cyfr, co oznacza, że ich stosunek mieści się w przedziale od 1/10 do 10. W takim razie musiałyby to być liczby postaci 2^{a+1} i 2^a albo 2^{a+2} i 2^a albo 2^{a+3} i 2^a. Rozważane dwie potęgi liczby 2 musiałyby również dawać tę samą resztę z dzielenia przez 9 (ponieważ mają tę samą sumę cyfr), tymczasem ich różnica może być jedynie równa $2^{a+1} - 2^a = 2^a$, $2^{a+2} - 2^a = 3 \cdot 2^a$ lub $2^{a+3} - 2^a = 7 \cdot 2^a$. Żadna z możliwych różnic nie jest podzielna przez 9, więc nie mogą mieć równych reszt z dzielenia przez 9, co kończy dowód.

Zadanie 6. W każdym polu prostokątnej tablicy znajduje się jedna liczba. Liczby wpisane w tablicę spełniają następujący warunek: dla dowolnego wiersza i dowolnej kolumny tablicy, liczba różnych wartości które pojawiają się w tym wierszu lub kolumnie, jest wpisana na polu w którym przecinają się ten wiersz i ta kolumna. Znajdź wszystkie tablice spełniające ten warunek.

Rozwiązanie 6. Jeśli gdziekolwiek w tablicy znajduje się liczba 1, to cała rząd i cała kolumna są wypełnione jedynkami, więc cała tablica jest wypełniona jedynkami – pokażemy, że takie tablice to jedyne tablice spełniajace warunki zadania. Załóżmy teraz, że na planszy nie ma żadnych jedynek. Niech n będzie największą liczbą występującą na planszy. Wtedy w rzędzie i kolumnie zawierających n musimy mieć n różnych wartości. Ale dostępnych jest tylko $n - 1$ różnych wartości (czyli od 2 do n) (zakładamy, że nie ma jedynek), co daje sprzeczność.