XV Olimpiada Matematyczna Juniorów (2019/20)

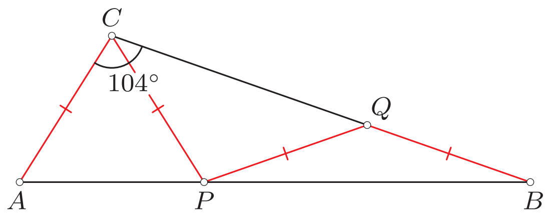
Zadania konkursowe zawodów pierwszego stopnia — część korespondencyjna

(1 września – 14 października 2019 r.)

Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

1. Do pewnej dodatniej liczby całkowitej n dopisano na końcu pewną cyfrę, uzyskując w ten sposób liczbę 13 razy większą od liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

2. Na bokach AB i BC trójkąta ABC leżą odpowiednio takie punkty P i Q (różne od wierzchołków trójkąta), że $AC=CP=PQ=QB$. Wiedząc, że $\sphericalangle ACB=104°$, wyznacz miary pozostałych kątów trójkąta ABC.

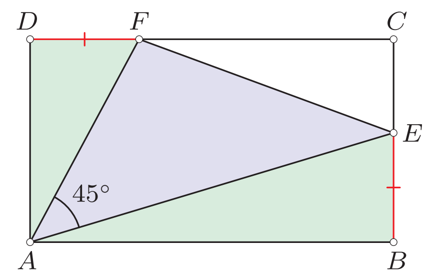


Zadanie 2.

3. Wyznacz wszystkie trójki (x,y,z) liczb rzeczywistych różnych od 0, dla których

$$xy(x+y)=yz(y+z)=zx(z+x).$$

4. Dany jest prostokąt $ABCD$. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach BC i CD, przy czym $\sphericalangle EAF=45°$ oraz $BE=DF$. Wykaż, że pole trójkąta AEF jest równe sumie pól trójkątów ABE i ADF.



Zadanie 4.

5. W turnieju wzięło udział 8 zawodników. Każda para zawodników rozegrała dokładnie jeden mecz, który zakończył się zwycięstwem jednego z nich lub remisem. Zwycięzca meczu otrzymywał 2 punkty, jego przeciwnik 0 punktów, a w przypadku remisu obaj zawodnicy uzyskiwali po 1 punkcie. Po rozegraniu wszystkich meczów okazało się, że każdy zawodnik miał tę samą liczbę punktów. Jaka jest najmniejsza możliwa liczba meczów, które zakończyły się remisem? Odpowiedź uzasadnij.

6. Dane są liczby naturalne a, b, c, które w zapisie dziesiętnym są zapisane takimi samymi cyframi (tzn. każda cyfra liczby a występuje w jej zapisie dziesiętnym tyle samo razy co w zapisie każdej z liczb b i c). Czy jest możliwe, aby $a+b+c=10^{1001}$? Odpowiedź uzasadnij.

7. Dany jest graniastosłup prosty, którego podstawą jest romb o boku długości a i kącie ostrym $60°$. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną, przecinając jego krawędzie boczne i uzyskując w przekroju kwadrat. Wyznacz wszystkie możliwe wartości, jakie może przyjąć długość boku tego kwadratu.

Rozwiązania powyższych zadań (wszystkich lub części z nich) należy przekazać szkolnemu koordynatorowi OMJ lub przesłać bezpośrednio, listem poleconym, do Komitetu Okręgowego OMJ właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

14 października 2019 r. (decyduje data stempla pocztowego).

Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym lub pod niewłaściwy adres nie będą rozpatrywane. Adresy Komitetów Okręgowych OMJ, szczegółowe wytyczne dotyczące sposobu redakcji rozwiązań i przesyłania prac, a także regulamin OMJ i inne bieżące informacje znajdują się na stronie internetowej Olimpiady: `www.omj.edu.pl`.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej.
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku.