Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część korespondencyjna

(1 września 2020 r. – 12 października 2020 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieje taka liczba sześciocyfrowa, której każde dwie kolejne cyfry tworzą pewną liczbę dwucyfrową będącą kwadratem liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Wykażemy, że taka liczba nie istnieje.

Przypuśćmy, wbrew tezie, że taką liczbę da się zbudować. Niech a_1 będzie jej cyfrą jedności, a_2 — cyfrą dziesiątek, a_3 — cyfrą setek, itd.

Jedynymi liczbami dwucyfrowymi będącymi kwadratami liczb całkowitych są: 16, 25, 36, 49, 64 oraz 81. W związku z tym każda z cyfr a_2, a_3, a_4, a_5 musi być zarówno cyfrą jedności jak i cyfrą dziesiątek którejś z wymienionych liczb dwucyfrowych. W szczególności, cyfra a_5 musi być więc równa 1, 4 lub 6.

Jeśli $a_5=1$, to $a_4=6$, $a_3=4$, $a_2=9$ i cyfry a_1 nie da się już dobrać.

Jeśli $a_5=4$, to $a_4=9$ i cyfry a_3 nie da się już dobrać.

Jeśli $a_5=6$, to $a_4=4$, $a_3=9$ i cyfry a_2 nie da się już dobrać.

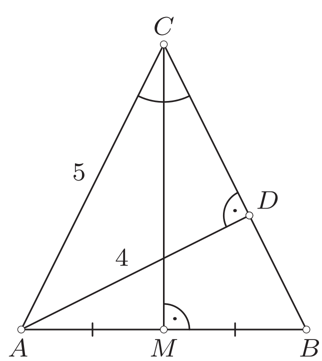
We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że nie istnieje liczba o postulowanej własności.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC=5$. Wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka A ma długość 4. Oblicz długość wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C.

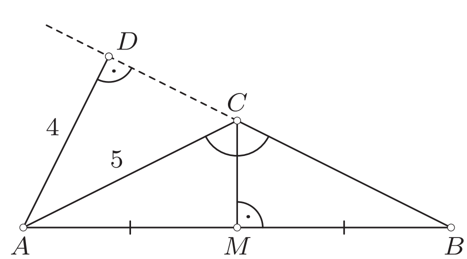
Rozwiązanie

Oznaczmy przez M środek odcinka AB. Ponieważ $AC=BC$, więc punkt M jest spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C. Szukamy długości odcinka CM.

Oznaczmy przez D spodek wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka A. Wówczas, jeśli $\sphericalangle ACB \leqslant 90^\circ$, to punkt D leży na odcinku BC (rys. 1). Jeśli natomiast $\sphericalangle ACB > 90^\circ$, to punkt D leży poza odcinkiem BC (rys. 2). Rachunki przeprowadzimy w obu tych przypadkach.



rys. 1



rys. 2

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej

Przyjmijmy, że $\sphericalangle ACB \leqslant 90^\circ$ (rys. 1). Obliczamy najpierw, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, długość odcinka CD:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,.$$

Stąd wyznaczamy długość odcinka BD:

$$BD = BC - CD = 5 - 3 = 2\,.$$

Dalej, znów korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość odcinka AB:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

Ostatecznie, korzystając po raz kolejny z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{25 - 5} = \sqrt{20}\,.$$

Załóżmy teraz, że $\sphericalangle ACB > 90^\circ$ (rys. 2). Rachunki przeprowadzimy w podobny sposób.

Najpierw, tak samo jak w poprzednim przypadku, wyznaczamy długość odcinka CD:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\,.$$

Stąd obliczamy długość odcinka BD:

$$BD = BC + CD = 5 + 3 = 8\,.$$

Dalej, korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczamy długość odcinka AB:

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 2\sqrt{20}\,.$$

Ostatecznie, korzystając po raz kolejny z twierdzenia Pitagorasa, uzyskujemy

$$CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - (\sqrt{20})^2} = \sqrt{5}\,.$$

Odp.: Szukana długość wysokości równa się $\sqrt{20}$ lub $\sqrt{5}$.

3. Liczby a, b, c spełniają warunek $|a-b| = 2|b-c| = 3|c-a|$. Udowodnij, że $a = b = c$.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu wykorzystamy następującą nierówność $|x| + |y| \geqslant |x+y|$, która jest spełniona dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y. Jej dowód przeprowadzimy w uwadze poniżej.

Oznaczmy: $r = |a-b| = 2|b-c| = 3|c-a|$. Wówczas $r \geqslant 0$ oraz

$$|a-b| = r\,, \quad |b-c| = \tfrac{1}{2}r\,, \quad |c-a| = \tfrac{1}{3}r\,.$$

Stąd, wykorzystując wspomnianą nierówność, uzyskujemy

$$\tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{3}r = |b-c| + |c-a| \geqslant |(b-c) + (c-a)| = |b-a| = |a-b| = r\,,$$

czyli $\frac{5}{6}r \geqslant r$. Nierówność ta nie może być jednak spełniona, jeśli $r > 0$. Wobec tego $r = 0$ i w konsekwencji $a - b = 0$, $b - c = 0$, $c - a = 0$. Stąd $a = b = c$, co należało wykazać.

Uwaga:

Dowód nierówności $|x| + |y| \geqslant |x+y|$ można przeprowadzić w następujący sposób. Załóżmy najpierw, że $x + y \geqslant 0$. Ponieważ $|x| \geqslant x$ oraz $|y| \geqslant y$, więc po dodaniu stronami tych nierówności uzyskujemy

$$|x| + |y| \geqslant x + y = |x+y|\,.$$

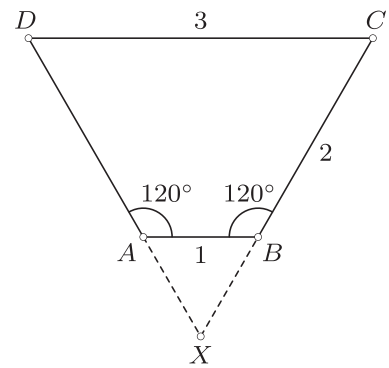
Jeśli z kolei $x + y < 0$, to dodając stronami nierówności $|x| \geqslant -x$ oraz $|y| \geqslant -y$, otrzymujemy

$$|x| + |y| \geqslant -x - y = -(x+y) = |x+y|\,.$$

W obu przypadkach dostajemy żądaną nierówność.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 120°$ oraz $CD = 3$, $BC = 2$, $AB = 1$. Oblicz długość odcinka AD.

Rozwiązanie



rys. 3

Oznaczmy przez X punkt przecięcia prostych AD i BC (rys. 3). Wówczas

$$\sphericalangle XAB = 180° - \sphericalangle DAB = 60° \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XBA = 180° - \sphericalangle CBA = 60°,$$

skąd wynika, że trójkąt ABX jest równoboczny. Zatem $BX = AB = 1$ i w konsekwencji $XC = 1+2 = 3 = CD$. Ponadto, z faktu, że trójkąt ABX jest równoboczny wynika także, że $\sphericalangle DXC = 60°$. Wobec tego trójkąt XCD również jest równoboczny. Stąd $XD = CD = 3$. Ostatecznie $AD = XD - XA = 3 - 1 = 2$.

5. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, których suma jest równa 2^{1002}, a iloczyn jest równy 5^{1002}? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, dla których $a+b+c+d = 2^{1002}$ oraz $abcd = 5^{1002}$. Z drugiej równości wynika, że każda z liczb a, b, c, d jest postaci 5^k, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą.

Przeanalizujemy reszty z dzielenia przez 5 obu stron równości $a+b+c+d = 2^{1002}$.

Zauważmy, że $2^{1002} = 4^{501} \equiv (-1)^{501} = -1 \pmod 5$. Stąd wniosek, że liczba 2^{1002} daje resztę 4 z dzielenia przez 5. Z kolei każda liczba postaci 5^k daje resztę 0 (gdy $k \geqslant 1$) lub 1 (gdy $k = 0$) z dzielenia przez 5. Zatem liczba $a+b+c+d$ daje z dzielenia przez 5 resztę 4 jedynie wtedy, gdy $a = b = c = d = 1$. Wtedy jednak $a+b+c+d = 4 \neq 2^{1002}$. Otrzymaliśmy sprzeczność, z której wynika, że nie istnieją liczby o postulowanej w treści zadania własności.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I, przypuśćmy, że istnieją dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, dla których $a+b+c+d = 2^{1002}$ oraz $abcd = 5^{1002}$. Zauważmy, że każda z liczb a, b, c, d jest postaci 5^k, gdzie k jest nieujemną liczbą całkowitą.

Tym razem przeanalizujemy reszty z dzielenia obu stron równości $a+b+c+d = 2^{1002}$ przez 8.

Oczywiście liczba 2^{1002} jest podzielna przez 8.

Dalej, zauważmy, że $5^2 = 25 \equiv 1 \pmod 8$. Wobec tego $5^{2j} \equiv 1 \pmod 8$ oraz $5^{2j+1} \equiv 5 \pmod 8$ dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej j. A zatem jeśli wykładnik k jest liczbą parzystą, to liczba 5^k daje resztę 1 przy dzieleniu przez 8, natomiast jeśli wykładnik k jest liczbą nieparzystą, to liczba 5^k daje resztę 5 przy dzieleniu przez 8.

Ponieważ każda z liczb a, b, c, d jest potęgą liczby 5 o wykładniku całkowitym nieujemnym, więc możliwe są następujące przypadki:

- $a+b+c+d \equiv 1+1+1+1 = 4 \pmod 8$;
- $a+b+c+d \equiv 1+1+1+5 \equiv 0 \pmod 8$;
- $a+b+c+d \equiv 1+1+5+5 \equiv 4 \pmod 8$;
- $a+b+c+d \equiv 1+5+5+5 \equiv 0 \pmod 8$;
- $a+b+c+d \equiv 5+5+5+5 \equiv 4 \pmod 8$.

Liczba $a+b+c+d$ jest zatem podzielna przez 8 jedynie w przypadku, gdy dokładnie jedna lub dokładnie trzy spośród liczb a, b, c, d są potęgami liczby 5 o wykładniku nieparzystym. Jednak w obu tych przypadkach iloczyn tych liczb jest potęgą liczby 5 o wykładniku nieparzystym (suma jednego wykładnika nieparzystego i trzech parzystych jest liczbą nieparzystą, a także suma trzech wykładników nieparzystych i jednego parzystego jest liczbą nieparzystą). Zatem iloczyn ten nie może być równy 5^{1002}. Otrzymaliśmy sprzeczność, która dowodzi, że nie istnieją liczby o postulowanej własności.

Uwaga

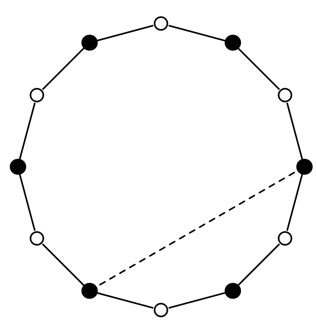
W rozwiązaniu wykorzystywaliśmy własności *kongruencji*. O tym, czym są konguencje i jak je stosować można przeczytać w opracowaniu *Matematyczne seminarium olimpijskie, cz. 1* dostępnym na stronie OMJ pod adresem

`www.omj.edu.pl/broszury-seminaria`

6. W $(2n+2)$-kącie wypukłym narysowano n^2 przekątnych. Udowodnij, że pewna z tych przekątnych rozcina $(2n+2)$-kąt na dwa wielokąty, z których każdy ma nieparzystą liczbę wierzchołków.

Rozwiązanie

Pokolorujmy kolejne wierzchołki wielokąta na przemian kolorem białym i czarnym. Zauważmy, że przekątna wielokąta dzieli go na dwa wielokąty o nieparzystych liczbach wierzchołków wtedy i tylko wtedy, gdy ma ona końce tych samych kolorów (zob. rys. 4 dla $n=5$).

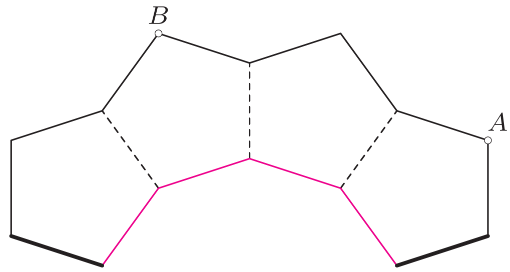


rys. 4

Obliczymy liczbę przekątnych (narysowanych lub nie), których końce są *różnych* kolorów. Wybierzmy najpierw wierzchołek biały. Możemy to zrobić na $n+1$ sposobów. Aby narysowany odcinek był przekątną, musi łączyć dwa niesąsiednie wierzchołki. Wierzchołek czarny nie sąsiadujący z ustalonym wcześniej wierzchołkiem białym możemy wybrać na $n-1$ sposobów. Wobec tego, łącznie jest dokładnie $(n+1)(n-1)=n^2-1$ przekątnych o końcach różnych kolorów.

Tymczasem przekątnych narysowano n^2. Wobec tego co najmniej jedna z narysowanych przekątnych ma końce tego samego koloru, a więc dzieli dany wielokąt na dwa wielokąty o nieparzystych liczbach wierzchołków.

7. Poniższą figurę, złożoną z czterech pięciokątów foremnych o boku długości 1, sklejono w przestrzeni w następujący sposób: najpierw zagięto ją wzdłuż odcinków przerywanych, łącząc pogrubione odcinki, a następnie uformowano w taki sposób, aby kolorowe odcinki utworzyły kwadrat. Wyznacz długość powstałego w ten sposób odcinka AB.

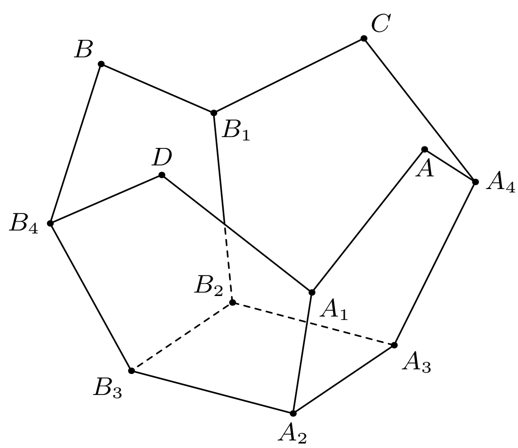


rys. 5

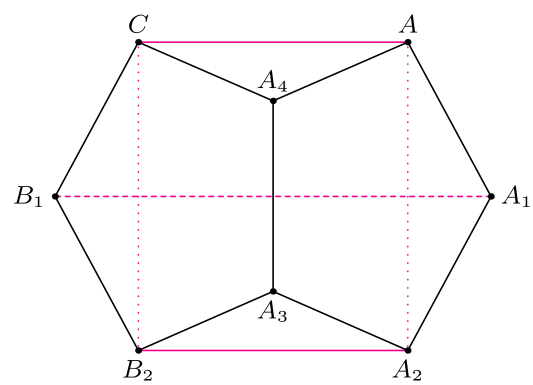
Rozwiązanie
Sposób I

Przyjmijmy oznaczenia wierzchołków jak na rysunku 6.

Zauważmy, że $A_2B_2 = \sqrt{2}$, gdyż jest to przekątna kwadratu o boku 1. W symetrii względem płaszczyzny symetralnej odcinka A_3A_4 punkt A przechodzi na A_2, a punkt C przechodzi na B_2, skąd uzyskujemy $AC = A_2B_2$ (rys. 7). Wobec tego AB jest przekątną kwadratu o boku $\sqrt{2}$, skąd $AB = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$.



rys. 6



rys. 7

Sposób II

Niech A', B', C', D' będą punktami przecięcia płaszczyzny $ABCD$ odpowiednio z prostymi A_1A_2, B_4B_3, B_1B_2, A_4A_3 (rys. 8). Wówczas wierzchołki A, B, C, D są środkami boków kwadratu $A'B'C'D'$ skąd $AB = A'B'$.

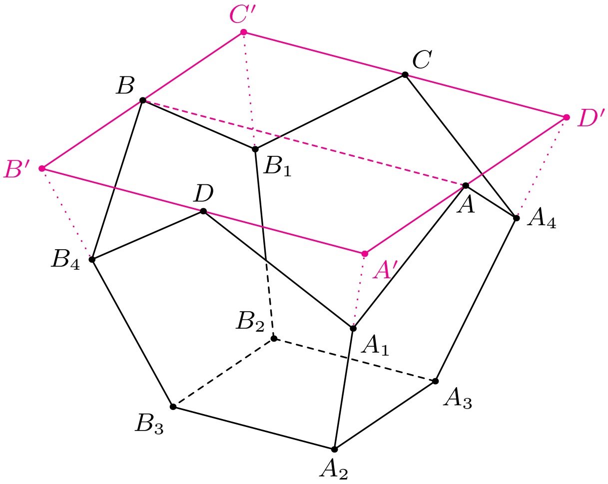
Rozważmy konfigurację zawartą w płaszczyźnie pięciokąta $DA_1A_2B_3B_4$. Zauważmy, że

$$\sphericalangle DB'B_4 = 180^\circ - \sphericalangle A_2B_3B' = 180^\circ - \sphericalangle B_3B_4D = \sphericalangle DB_4B',$$

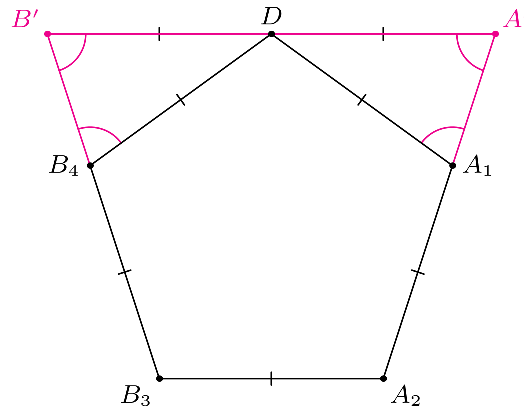
skąd wniosek, że trójkąt $B'DB_4$ jest równoramienny i $DB' = DB_4 = 1$. Analogicznie usadaniamy, że $DA' = DA_1 = 1$. W konsekwencji mamy więc

$$A'B' = A'D + B'D = 1 + 1 = 2, \quad \text{skąd} \quad AB = 2.$$

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej



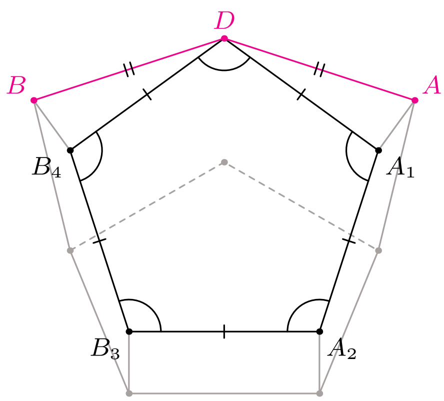
rys. 8



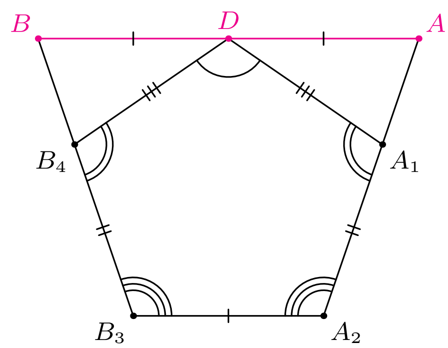
rys. 9

Uwaga

Warto zauważyć, że druga część rozumowania została przeprowadzona właśnie w płaszczyźnie jednego z danych pięciokątów po tym, jak odcinek AB został zrzutowany *równolegle* na tę płaszczyznę. W szczególności, rzut prostopadły całej figury na płaszczyznę takiego pięciokąta (rys. 10) oraz „widok z boku” (czyli rzut prostopadły na płaszczyznę pionową, rys. 11) wyglądają inaczej niż konfiguracja z rysunku 9.



rys. 10



rys. 11

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej