

Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część zadaniowa

Przykładowy zestaw zadań

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań wpisz na każdą z siedmiu kartek swoje imiona, nazwisko, numer klasy oraz numer zadania.

Rozwiązania poszczególnych zadań zapisuj **na oddzielnych kartkach**. Używaj koloru czarnego lub niebieskiego (również przy wykonywaniu rysunków). Nie używaj ołówka ani korektora.

Zadania są jednakowo punktowane. Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać **3 punkty**, a za istotny postęp w kierunku poprawnego rozwiązania można uzyskać **1 punkt**.

Pamiętaj, że ocenie podlega przedstawiony **tok rozumowania**, więc staraj się zaprezentować go dokładnie i precyzyjnie. Za podanie samej odpowiedzi, nawet poprawnej, bez uzasadnienia (lub z błędnym uzasadnieniem) nie będą przyznawane punkty.

Czas na rozwiązywanie zadań: 100 minut.

Powodzenia!

1. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna, której każda cyfra jest równa 2 lub 6 i która jest podzielna przez 4.
2. Prostokąt o obwodzie 300 został podzielony na 9 kwadratów o boku długości a . Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby a .
3. Uzasadnij, że pole trójkąta równoramiennego o bokach długości 5, 5, 6 jest równe polu trójkąta równoramiennego o bokach długości 5, 5, 8.
4. Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Uzasadnij, że liczba n^2 ma dokładnie pięć różnych dodatnich dzielników.
5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AB i CD są równoległe oraz boki BC i DE są równoległe. Zachodzi także równość $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED$. Wykaż, że $AB + BC = CD + DE$.
Uwaga. Pięciokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miary mniejsze niż 180° .
6. W pewnej grupie składającej się z sześciu osób każdy lubi dokładnie trzy inne osoby, przy czym jeśli osoba A lubi osobę B , to niekoniecznie B lubi A . Rozstrzygnij, czy wynika z tego, że pewne dwie osoby wzajemnie się lubią.
7. Liczby rzeczywiste x, y są dodatnie i mniejsze od 2. Uzasadnij, że $x + y > x \cdot y$.

Przykładowy zestaw części zadaniowej — Rozwiązania

Zadanie 1.

Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba naturalna, której każda cyfra jest równa 2 lub 6 i która jest podzielna przez 4.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Niech n będzie dowolną liczbą złożoną wyłącznie z cyfr 2 oraz 6. Jeśli liczba n jest równa 2 lub 6, to nie jest podzielna przez 4. Jeżeli liczba n jest co najmniej dwucyfrowa, to kończy się jedną z par cyfr:

$$22, \quad 26, \quad 62, \quad 66.$$

Na mocy cechy podzielności przez 4 stwierdzamy, że w żadnym z powyższych przypadków liczba n nie dzieli się przez 4.

Sposób 2. Jeżeli liczba naturalna n ma w zapisie dziesiętnym wyłącznie cyfry 2 i 6, to liczba

$$\frac{1}{2}n$$

ma w zapisie dziesiętnym wyłącznie cyfry 1 i 3, więc jest nieparzysta. Tymczasem jeśli liczba n jest podzielna przez 4, to liczba $\frac{1}{2}n$ jest parzysta. Zatem nie istnieje liczba o opisanej własności.

Zadanie 2.

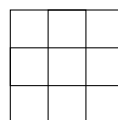
Prostokąt o obwodzie 300 został podzielony na 9 kwadratów o boku długości a . Wyznacz wszystkie możliwe wartości liczby a .

Rozwiązanie.

Prostokąt zbudowany z 9 kwadratów o boku a ma wymiary $3a \times 3a$ lub $a \times 9a$:



lub



W pierwszym przypadku $20a = 300$, skąd $a = 15$, w drugim zaś $12a = 300$, skąd $a = 25$.

Zadanie 3.

Uzasadnij, że pole trójkąta równoramiennego o bokach długości 5, 5, 6 jest równe polu trójkąta równoramiennego o bokach długości 5, 5, 8.

Rozwiązanie.

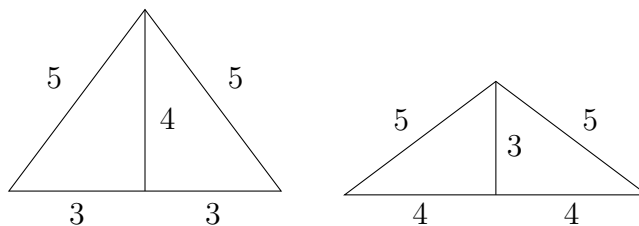
Sposób 1. W każdym z trójkątów prowadzimy wysokość z wierzchołka kąta między ramionami, która dzieli podstawę na połowy. Obliczamy długości poprowadzonych wysokości z twierdzenia Pitagorasa:

- w przypadku trójkąta o bokach 5, 5, 6 jest to $\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$,
- w przypadku trójkąta o bokach 5, 5, 8 jest to $\sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Sprawdzamy, że pola obu trójkątów są równe:

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3.$$

Sposób 2. Wykorzystamy fakt, że trójkąt o bokach 3, 4, 5 jest prostokątny. Trójkąt o bokach długości 5, 5, 6 można uzyskać przez sklejenie dwóch takich trójkątów prostokątnych wzdłuż przyprostokątnych o długości 4, a trójkąt o bokach długości 5, 5, 8 można uzyskać przez sklejenie dwóch takich trójkątów wzdłuż przyprostokątnych o długości 3. Obydwa te trójkąty równoramienne mają więc pole równe dwukrotności pola trójkąta 3, 4, 5.



Sposób 3. Rozważmy trójkąt prostokątny o bokach długości 6, 8, 10. Środkowa poprowadzona do przeciwprostokątnej dzieli go na dwa trójkąty o równych polach i ma długość 5. Dwa trójkąty uzyskane z tego podziału to trójkąty, o których mowa w treści zadania.

Zadanie 4.

Dodatnia liczba całkowita n ma dokładnie trzy różne dodatnie dzielniki. Uzasadnij, że liczba n^2 ma dokładnie pięć różnych dodatnich dzielników.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Liczba n jest różna od liczby 1, która ma tylko jeden dzielnik dodatni oraz od dowolnej liczby pierwszej p , która ma tylko dwa dzielniki dodatnie. Zatem $n > 1$ jest liczbą złożoną, wobec czego istnieją liczby całkowite x, y większe od 1 o tej własności, że $n = xy$.

Jeżeli $x \neq y$ to liczba n ma co najmniej cztery różne dzielniki: 1, x , y , n , więc nie spełnia warunków zadania. Zatem $x = y$, czyli $n = x^2$ i jest to jedyny rozkład n na czynniki większe od 1. Stąd wynika, że x jest liczbą pierwszą.

W konsekwencji $n^2 = x^4$, gdzie x jest liczbą pierwszą. Jedynymi dodatnimi dzielnikami tej liczby są 1, x , x^2 , x^3 , x^4 , czyli n^2 ma dokładnie pięć dodatnich dzielników.

Sposób 2. Liczba n posiada dzielnik różny od 1 i samej siebie. Najmniejszy taki dzielnik jest liczbą pierwszą. Zatem dzielnikami n są na pewno 1, p , n dla pewnej liczby pierwszej p . Skoro n nie ma innych dzielników, to $n = p^2$ i kontynuujemy jak wyżej.

Sposób 3. Korzystamy z następującego faktu:

Dodatnia liczba całkowita n ma nieparzystą liczbę dzielników dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy n jest kwadratem liczby całkowitej.

Niech $n = x^2$. Liczba n ma dzielniki 1, x , x^2 i są to wszystkie jej dzielniki. Zatem x jest liczbą pierwszą i kontynuujemy jak wyżej.

Zadanie 5.

W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ boki AB i CD są równoległe oraz boki BC i DE są równoległe. Zachodzi także równość $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED$. Wykaż, że $AB + BC = CD + DE$.

Uwaga. Pięciokąt nazywamy *wypukłym*, jeśli wszystkie jego kąty wewnętrzne mają miary mniejsze niż 180° .

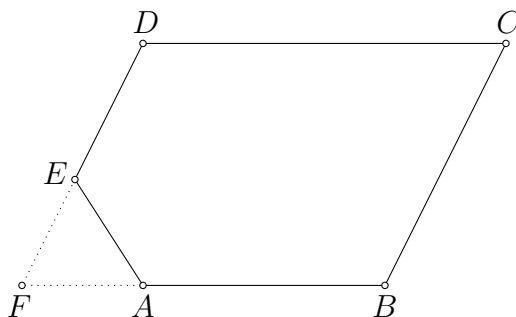
Rozwiązanie.

Oznaczmy przez F punkt przecięcia prostych AB i DE . Proste DF i BC są równoległe. Podobnie proste BF i CD są równoległe, zatem czworokąt $BCDF$ jest równoległobokiem. Z równości $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED$ wynika, że

$$\sphericalangle FEA = 180^\circ - \sphericalangle AED = 180^\circ - \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF,$$

czyli trójkąt AEF jest równoramienny. Mamy więc $AF = EF$. Stąd:

$$AB + BC = AB + EF + DE = AB + AF + DE = BF + DE = CD + DE.$$



Zadanie 6.

W pewnej grupie składającej się z sześciu osób każdy lubi dokładnie trzy inne osoby, przy czym jeśli osoba A lubi osobę B , to niekoniecznie B lubi A . Rozstrzygnij, czy wynika z tego, że pewne dwie osoby wzajemnie się lubią.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Zauważmy, że jest dokładnie 15 par osób. Gdyby żadne dwie osoby nie lubiły się wzajemnie, mogłoby więc być co najwyżej 15 sytuacji, w których jedna osoba lubi drugą. Tymczasem takich sytuacji jest $6 \cdot 3 = 18$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że musi istnieć co najmniej jedna para osób lubiących się wzajemnie (a nawet co najmniej trzy takie pary).

Sposób 2. *Sympatią* nazwijmy sytuację, w której jedna osoba lubi drugą (jeśli pewne dwie osoby lubią się wzajemnie, oznacza to dwie sympatie). Załóżmy, że żadne dwie osoby nie lubią się wzajemnie. To oznacza, że każda osoba jest lubiana przez co najwyżej dwie inne osoby (te, których ona sama nie lubi), a zatem łączna liczba sympatii jest nie większa od $6 \cdot 2 = 12$. Z drugiej strony, w myśl warunków zadania jest ona równa dokładnie $6 \cdot 3 = 18$. Sprzeczność oznacza, że pewne dwie osoby lubią się wzajemnie.

Zadanie 7.

Liczby rzeczywiste x, y są dodatnie i mniejsze od 2. Uzasadnij, że $x + y > x \cdot y$.

Rozwiązanie.

Sposób 1. Skoro liczby x, y są dodatnie, to dowodzoną nierówność można przekształcić do równoważnej postaci

$$\frac{x+y}{x \cdot y} > \frac{x \cdot y}{x \cdot y}, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} > 1.$$

Ponieważ $x < 2$ i $y < 2$, więc $\frac{1}{x} > \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{y} > \frac{1}{2}$. Dodając te nierówności stronami, uzyskujemy żadaną nierówność.

Sposób 2. Ponieważ $x < 2$ oraz $y > 0$, więc $xy < 2y$. Podobnie uzasadniamy, że $xy < 2x$. Dodając otrzymane nierówności stronami, uzyskujemy

$$2xy < 2(x + y), \quad \text{czyli} \quad xy < x + y.$$

Sposób 3. Załóżmy, że $x \leq y$. Wówczas $x + y \geq 2x > xy$, przy czym druga nierówność wynika z tego, że $2 > y$ oraz $x > 0$. Analogicznie w przypadku $x > y$ mamy $x + y > 2y > xy$.

Sposób 4. Skoro $0 < x < 2$ i $0 < y < 2$, to $-1 < x - 1 < 1$ oraz $-1 < y - 1 < 1$, czyli

$$|x - 1| < 1 \quad \text{oraz} \quad |y - 1| < 1.$$

Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy $|(x-1)(y-1)| < 1$. W szczególności wynika z tego, że

$$(x-1)(y-1) < 1, \quad \text{czyli} \quad xy < x + y.$$