XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(11 stycznia 2025 r.)

1. Punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, przy czym

$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABE.$$

Wykaż, że $AB \geqslant AD$.

2. Każde pole tablicy 5×5 pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Okazało się, że w każdym wierszu tej tablicy liczba czerwonych pól jest taka sama, a w każdych dwóch kolumnach tej tablicy liczby niebieskich pól są różne. Wyznacz łączną liczbę niebieskich pól w całej tablicy. Podaj wszystkie możliwości.

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$ i $\sphericalangle ACB = 150°$. Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej BC, punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej AC, a punkt C' jest symetryczny do punktu C względem prostej AB. Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b, że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}\,?$$

Uwaga. Symbol $\sqrt[3]{x}$ oznacza *pierwiastek trzeciego stopnia z x*, czyli taką liczbę rzeczywistą y, że $y^3 = x$.

5. Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, … Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej