XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (11 stycznia 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Punkt E leży na boku CD prostokąta $ABCD$, przy czym

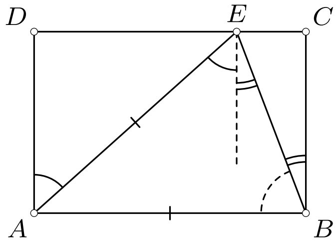
$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle ABE.$$

Wykaż, że $AB \geqslant AD$.

Rozwiązanie

Sposób I

Z równości kątów naprzemianległych wynika, że $\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle AEB$ (rys. 1). Dana w treści zadania równość przybiera więc postać $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ABE$, skąd $AB = AE$.



rys. 1

Należy więc uzasadnić, że $AE \geqslant AD$. To wynika na przykład z tego, że najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego ADE jest jego przeciwprostokątna AE.

Uwaga

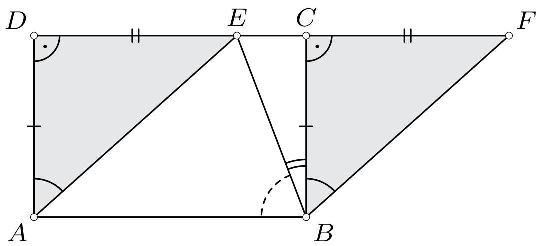
Równość $AB = AD$ zachodzi tylko gdy punkty E i D się pokrywają. Przy założeniu, że punkt E nie jest żadnym z końców odcinka CD, zachodzi nierówność $AB > AD$.

Sposób II

Oznaczmy przez F taki punkt na przedłużeniu odcinka CD, że $CF = DE$ (rys. 2). Wówczas trójkąty prostokątne ADE oraz BCF są przystające (cecha bok–kąt–bok), a zatem

$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle EBC = \sphericalangle CBF + \sphericalangle EBC = \sphericalangle EBF.$$

Dana równość kątów oznacza więc, że $\sphericalangle ABE = \sphericalangle EBF$, czyli BE jest dwusieczną kąta ABF.



rys. 2

Ponadto $EF = EC + CF = EC + DE = DC = AB$ oraz $EF \parallel AB$, skąd wynika, że czworokąt $ABFE$ jest równoległobokiem. Przekątna BE tego równoległoboku jest dwusieczną jego kąta wewnętrznego ABF, więc równoległobok $ABFE$ jest rombem. Do zakończenia rozwiązania pozostaje zauważyć, że bok rombu ma długość większą lub równą wysokości tego rombu.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

2. Każde pole tablicy 5×5 pomalowano albo na czerwono, albo na niebiesko. Okazało się, że w każdym wierszu tej tablicy liczba czerwonych pól jest taka sama, a w każdych dwóch kolumnach tej tablicy liczby niebieskich pól są różne. Wyznacz łączną liczbę niebieskich pól w całej tablicy. Podaj wszystkie możliwości.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Łączna liczba niebieskich pól jest równa **10** lub **15**.

Skoro w każdym wierszu tablicy znajduje się ta sama liczba czerwonych pól, to również w każdym wierszu znajduje się ta sama liczba niebieskich pól — oznaczmy tę liczbę przez n. Wówczas szukana łączna liczba niebieskich pól w całej tablicy jest równa $5n$.

Możliwe liczby niebieskich pól w jednej kolumnie tablicy to 0, 1, 2, 3, 4, 5. Skoro w każdych dwóch kolumnach znajduje się inna liczba niebieskich pól, to liczby niebieskich pól w kolumnach tablicy są pięcioma spośród powyższych sześciu liczb. Zatem dokładnie jedna z powyższych sześciu liczb nie jest liczbą niebieskich pól w żadnej kolumnie tablicy — oznaczmy tę liczbę przez x. Wówczas łączna liczba niebieskich pól w całej tablicy jest równa

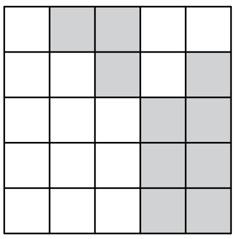
$$0+1+2+3+4+5-x=15-x.$$

Wynika z tego, że

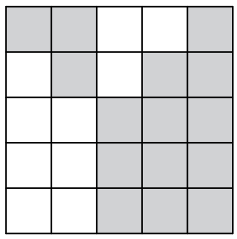
$$5n=15-x,\quad \text{czyli}\quad n=3-\frac{x}{5}.$$

Aby uzyskana w ten sposób liczba n była całkowita, liczba x musi być podzielna przez 5, czyli $x=0$ albo $x=5$. Dla $x=0$ mamy $n=3$ i $5n=15$, a dla $x=5$ mamy $n=2$ i $5n=10$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że w obydwu przypadkach istnieją kolorowania pól tablicy spełniające warunki zadania (rys. 3–4, przy czym zacieniowane pola to te, które należy pomalować na niebiesko).



rys. 3



rys. 4

3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC=BC$ i $\sphericalangle ACB=150^\circ$. Punkt A' jest symetryczny do punktu A względem prostej BC, punkt B' jest symetryczny do punktu B względem prostej AC, a punkt C' jest symetryczny do punktu C względem prostej AB. Udowodnij, że trójkąt $A'B'C'$ jest równoboczny.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\sphericalangle BAC=\sphericalangle ABC=15^\circ$ oraz $AC=BC=A'C=B'C=AC'=BC'$ (rys. 5). Kąt zewnętrzny przy C w trójkącie ABC ma miarę 30°, więc $\sphericalangle ACA'=2\cdot30^\circ=60^\circ$. W połączeniu z $AC=A'C$ oznacza to, że trójkąt $AA'C$ jest równoboczny i $AA'=AC$. Ponadto

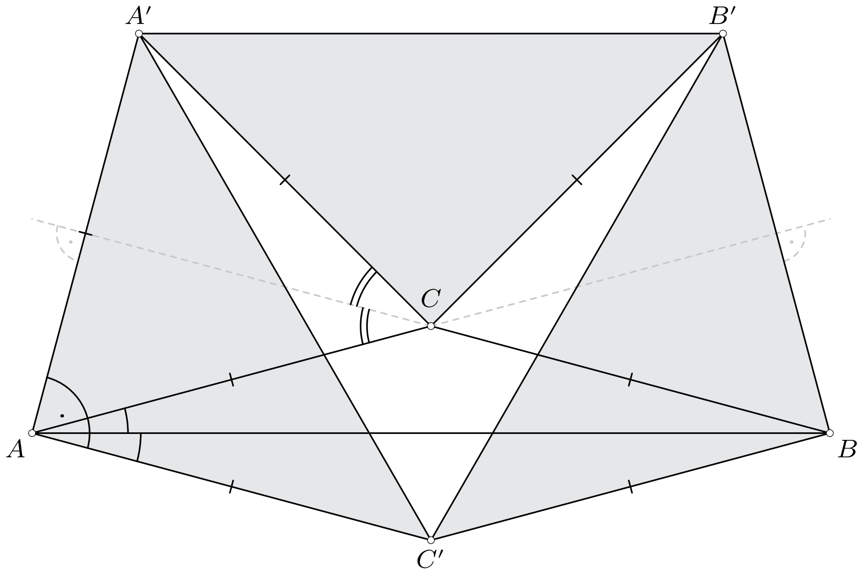
$$\sphericalangle A'AC'=\sphericalangle A'AC+\sphericalangle BAC+\sphericalangle BAC'=60^\circ+15^\circ+15^\circ=90^\circ.$$

W pełni analogicznie uzasadniamy, że $BB'=BC$ oraz $\sphericalangle B'BC'=90^\circ$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Zauważmy wreszcie, że

$$\sphericalangle A'CB' = \sphericalangle ACB + \sphericalangle A'CB + \sphericalangle ACB' - 360^\circ = 3\cdot 150^\circ - 360^\circ = 90^\circ.$$



rys. 5

Z poczynionych obserwacji wynika, że $A'CB'$, $A'AC'$, $B'BC'$ są przystającymi trójkątami prostokątnymi równoramiennymi (cecha bok–kąt–bok). W konsekwencji $A'B' = A'C' = B'C'$, co było do udowodnienia.

---

4. Czy istnieją takie dodatnie liczby całkowite a oraz b, że

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{2025}\,?$$

Uwaga. Symbol $\sqrt[3]{x}$ oznacza *pierwiastek trzeciego stopnia z* x, czyli taką liczbę rzeczywistą y, że $y^3 = x$.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $2025 = 3^4\cdot 5^2 = 3^3\cdot 75$. Wobec tego

$$\sqrt[3]{2025} = \sqrt[3]{3^3\cdot 75} = 3\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + 2\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{2^3\cdot 75} = \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{600}.$$

Wystarczy więc przyjąć $a = 75$ oraz $b = 600$.

Uwaga

Para $\{a,b\} = \{75,600\}$ jest jedyną parą dodatnich liczb całkowitych spełniającą daną równość.

---

5. Liczbę całkowitą nazwiemy *olimpijską*, jeśli można ją uzyskać z liczby 1 w wyniku wykonania pewnej liczby operacji polegających na zwiększeniu liczby o jej cyfrę jedności. Początkowymi liczbami olimpijskimi są więc 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, … Wykaż, że kwadrat liczby olimpijskiej jest liczbą olimpijską.

Rozwiązanie

Niech a_k oznacza k-tą liczbę olimpijską, czyli $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $a_4 = 8$, $a_5 = 16$ itd. Zauważmy, że cyfry jedności liczb olimpijskich różnych od 1 powtarzają się z okresem 4 i są równe kolejno 2, 4, 8, 6. To oznacza, że

$$a_{k+4} = a_k + (2+4+6+8) = a_k + 20,$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

gdyż wykonując cztery kolejne operacje, wykorzystamy w pewnej kolejności wszystkie cztery składniki 2, 4, 8, 6. Skoro $a_2=2$, to $a_6=22$, $a_{10}=42$, $a_{14}=62$, ... są wszystkimi dodatnimi liczbami całkowitymi dającymi resztę 2 przy dzieleniu przez 20.

Analogicznie uzasadniamy, że wśród dodatnich liczb całkowitych

- a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, ... to wszystkie liczby dające resztę 4 przy dzieleniu przez 20;
- a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, ... to wszystkie liczby dające resztę 8 przy dzieleniu przez 20;
- a_5, a_9, a_{13}, a_{17}, ... to wszystkie liczby dające resztę 16 przy dzieleniu przez 20.

Tym samym uzasadniliśmy następujący fakt.

> *Liczba większa od* 1 *jest olimpijska dokładnie wtedy, gdy przy dzieleniu przez* 20 *daje jedną z reszt* 2, 4, 8, 16.

Ponieważ $a_1^2=1=a_1$ jest liczbą olimpijską, więc pozostaje udowodnić, że kwadraty liczb dających resztę 2, 4, 8 lub 16 przy dzieleniu przez 20 również dają jedną z tych reszt przy dzieleniu przez 20. W tym celu zauważmy, że

- jeśli $a=20n+2$, to $a^2=(20n+2)^2=400n^2+80n+4=20\cdot(20n^2+4n)+4$;
- jeśli $a=20n+4$, to $a^2=(20n+4)^2=400n^2+160n+16=20\cdot(20n^2+8n)+16$;
- jeśli $a=20n+8$, to $a^2=(20n+8)^2=400n^2+320n+64=20\cdot(20n^2+16n+3)+4$;
- jeśli $a=20n+16$, to $a^2=(20n+16)^2=400n^2+640n+256=20\cdot(20n^2+32n+12)+16$.

Ponieważ liczby dające resztę 4 lub 16 przy dzieleniu przez 20 są olimpijskie, więc dowód jest zakończony.

Uwaga

Drugą część rozwiązania można przedstawić w postaci bardziej zwartej i mniej wymagającej rachunkowo przy użyciu *kongruencji*. Dla liczb całkowitych a, b oraz liczby całkowitej $m\geqslant 1$ zapisujemy $a\equiv b \pmod m$ jeżeli m jest dzielnikiem liczby $a-b$, czyli innymi słowy — liczby a oraz b dają tę samą resztę przy dzieleniu przez m. Stosując własności kongruencji, możemy zapisać:

- jeśli $a\equiv 2 \pmod{20}$, to $a^2\equiv 2^2\equiv 4 \pmod{20}$;
- jeśli $a\equiv 4 \pmod{20}$, to $a^2\equiv 4^2\equiv 16 \pmod{20}$;
- jeśli $a\equiv 8 \pmod{20}$, to $a^2\equiv 8^2\equiv 64\equiv 4 \pmod{20}$;
- jeśli $a\equiv 16 \pmod{20}$, to $a\equiv -4 \pmod{20}$ i w konsekwencji $a^2\equiv(-4)^2\equiv 16 \pmod{20}$.

Więcej informacji o kongruencjach i ich własnościach można odnaleźć na przykład w broszurze *Matematyczne seminarium olimpijskie, cz. 1*, dostępnej na stronie `omj.edu.pl/uploads/attachments/seminaria_1.pdf` (strony 20–25).

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej