XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (15 marca 2025 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Czy istnieje czworościan, w którym długości krawędzi są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, a ich suma jest równa 25? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Taki czworościan nie istnieje.

Zauważmy najpierw, że nie istnieje trójkąt różnoboczny o wszystkich bokach całkowitej długości, w którym jeden z boków ma długość 1. Rzeczywiście, jeżeli w pewnym trójkącie boki mają długości 1, a, b, przy czym $1 < a < b$, to na mocy nierówności trójkąta: $b < a+1$. W konsekwencji liczba b jest jednocześnie większa od a i mniejsza od $a+1$ — liczby a, b nie mogą więc jednocześnie być całkowite.

Z poczynionej obserwacji wynika, że jeśli długości krawędzi pewnego czworościanu są sześcioma różnymi liczbami całkowitymi, to pośród tych liczb nie ma liczby 1. W konsekwencji suma długości tych krawędzi jest nie mniejsza od

$$2+3+4+5+6+7=27,$$

czyli w szczególności nie jest możliwe, aby była równa 25.

Uwaga

Można wykazać, że istnieje czworościan o krawędziach długości 2, 3, 4, 5, 6, 7 (czyli taki, w którym suma długości krawędzi jest równa 27).

2. W pewnej imprezie biorą udział chłopcy i dziewczęta. Każda z osób uczestniczących w tej imprezie zna wśród pozostałych osób dokładnie 3 chłopców i dokładnie 7 dziewcząt. Udowodnij, że liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest podzielna przez 20.

Uwaga. Zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B zna osobę A.

Rozwiązanie

Oznaczmy liczbę chłopców biorących udział w tej imprezie przez c, a liczbę dziewcząt biorących udział w tej imprezie przez d. Wówczas liczba wszystkich osób uczestniczących w tej imprezie jest równa $c+d$.

Łączna liczba znajomości między chłopcami a dziewczętami jest z jednej strony równa $7c$ (gdyż każdy z c chłopców zna dokładnie 7 dziewcząt), z drugiej zaś strony równa $3d$ (gdyż każda z d dziewcząt zna dokładnie 3 chłopców). Wobec tego $7c=3d$, skąd wynika, że $c=3k$ oraz $d=7k$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k.

Łączna liczba znajomości pomiędzy chłopcami jest równa dokładnie $\frac{1}{2}\cdot 3c$ (gdyż każdy z c chłopców zna dokładnie 3 innych chłopców, a w iloczynie $3\cdot c$ każda taka znajomość jest policzona dwukrotnie). W konsekwencji liczba znajomości pomiędzy chłopcami jest równa $\frac{9}{2}k$, skąd wynika, że $k=2\ell$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej ℓ.

Ostatecznie łączna liczba osób uczestniczących w imprezie jest równa

$$c+d=3k+7k=10k=20\ell,$$

czyli jest liczbą podzielną przez 20.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

3. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p,q), dla których liczba $pq+4$ jest czwartą potęgą liczby pierwszej.

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedynymi parami (p,q) spełniającymi warunki zadania są $(7,11)$ oraz $(11,7)$.

Załóżmy, że dla pewnych liczb pierwszych p, q istnieje liczba pierwsza r o tej własności, że $pq+4=r^4$, czyli

$$pq=r^4-4=(r^2)^2-2^2=(r^2-2)(r^2+2).$$

Czynniki r^2-2 oraz r^2+2 są liczbami całkowitymi większymi od 1. Liczba pq jest iloczynem dwóch liczb pierwszych, więc ma tylko jedno przedstawienie w postaci takiego iloczynu: jest nim $p\cdot q$. To oznacza, że jedna z liczb r^2-2, r^2+2 jest równa p, a druga z nich jest równa q.

Zauważmy, że liczba $(r-1)r(r+1)=r(r^2-1)$ jest podzielna przez 3 jako iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych. Jeżeli r nie jest liczbą podzielną przez 3, to w myśl poczynionej obserwacji, r^2-1 jest liczbą podzielną przez 3 i w konsekwencji także liczba $r^2-1+3=r^2+2$ jest podzielna przez 3. Jednak liczba r^2+2 jest równa p lub q, skąd wniosek, że $r^2+2=3$, czyli $r=1$ lub $r=-1$. Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż liczby 1, -1 nie są pierwsze.

Jeżeli r jest liczbą podzielną przez 3, to $r=3$, gdyż r jest liczbą pierwszą. Bezpośrednio sprawdzamy, że wówczas liczby $r^2-2=7$ oraz $r^2+2=11$ są pierwsze i w konsekwencji pary $(p,q)=(7,11)$ oraz $(p,q)=(11,7)$ spełniają warunki zadania.

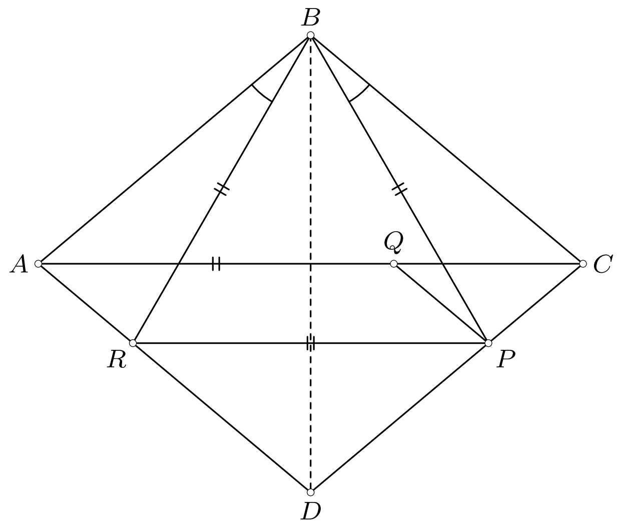
4. Dany jest romb $ABCD$, w którym $\sphericalangle ABC=100^\circ$. Punkt P leży na boku CD, przy czym $\sphericalangle PBC=20^\circ$. Prosta równoległa do boku AD przechodząca przez punkt P przecina przekątną AC w punkcie Q. Wykaż, że $BP=AQ$.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez R punkt symetryczny do punktu P względem prostej BD (rys. 1). Wówczas czworokąt $ARPQ$ jest równoległobokiem, gdyż ma dwie pary przeciwległych boków równoległych. Ponadto $BP=BR$ oraz

$$\sphericalangle PBR=\sphericalangle ABC-\sphericalangle PBC-\sphericalangle RBA=100^\circ-20^\circ-20^\circ=60^\circ,$$

skąd wynika, że trójkąt BPR jest równoboczny. W konsekwencji $AQ=PR=BP$, co było do udowodnienia.



rys. 1

5. W każdym polu tablicy 5×5 znajduje się strzałka skierowana w górę, w dół, w lewo lub w prawo. Wykaż, że można usunąć z tej tablicy dokładnie dwadzieścia strzałek, tak aby żadne dwie z pozostałych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

Uwaga. Przyjmujemy, że każda strzałka wskazuje na wszystkie pola znajdujące się w tym kierunku, w którym jest skierowana. Żadna strzałka nie wskazuje na pole, w którym się znajduje.

Rozwiązanie

Strzałkę skierowaną w górę lub w dół nazwiemy *pionową*, a strzałkę skierowaną w prawo lub w lewo nazwiemy *poziomą*.

Zauważmy, że jeśli w każdym wierszu tablicy znajduje się co najmniej jedna strzałka pozioma, to wystarczy pozostawić po jednej strzałce poziomej w każdym wierszu, aby żadne dwie z tych pięciu strzałek nie wskazywały na to samo pole.

W przeciwnym wypadku w pewnym wierszu tablicy znajdują się wyłącznie strzałki pionowe, więc żadne dwie z nich nie wskazują na to samo pole. Wystarczy więc pozostawić pięć strzałek z tego wiersza.

Uwaga

Istnieją takie rozmieszczenia strzałek w polach tablicy (np. rys. 2), że *nie wystarczy* usunąć tylko 19 strzałek aby wyeliminować wszystkie pary strzałek wskazujących na to samo pole. Innymi słowy, liczba 20 jest *najmniejszą* liczbą usuwanych strzałek, która zawsze wystarczy do uzyskania sytuacji, w której żadne dwie strzałki nie wskazują na to samo pole.

$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\downarrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$

rys. 2

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej