XX Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(10 października 2024 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Początkową cenę pewnego produktu obniżono o 50%, a następnie nową cenę obniżono o 50%. W wyniku tych dwóch obniżek początkowa cena spadła

N a) o 50%;

T b) o 75%;

N c) o 100%.

Komentarz

Załóżmy, że początkowa cena była równa c. Cena po pierwszej obniżce była więc równa $\frac{1}{2}c$, a cena po drugiej obniżce była równa $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c=\frac{1}{4}c=c-\frac{3}{4}c=c-75\%c$. Wobec tego w wyniku obu obniżek początkowa cena spadła o 75%.

2. Liczba $20^1\cdot 20^2\cdot 20^3$ jest równa

T a) 20^{1+2+3};

T b) $20^{1\cdot 2\cdot 3}$;

T c) $\left(\left(20^1\right)^2\right)^3$.

Komentarz

a), b) Dana liczba to iloczyn $1+2+3=6$ czynników równych 20, więc jest równa 20^6.

c) Dla dowolnych dodatnich liczb całkowitych a, b, c mamy $\left(a^b\right)^c=a^{b\cdot c}$, skąd

$$\left(\left(20^1\right)^2\right)^3=\left(20^{1\cdot 2}\right)^3=20^{1\cdot 2\cdot 3}=20^6.$$

3. Każda cyfra pewnej 9-cyfrowej liczby n jest równa 2 lub 5. Wynika z tego, że liczba n jest podzielna przez

N a) 2;

T b) 3;

N c) 5.

Komentarz

a) Jeśli cyfrą jedności n jest 5, to n nie jest liczbą parzystą.

c) Jeśli cyfrą jedności n jest 2, to n nie jest liczbą podzielną przez 5.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

b) Każda z liczb $2=3-1$, $5=6-1$ jest o 1 mniejsza od liczby podzielnej przez 3. Wobec tego suma dziewięciu liczb, z których każda jest równa 2 lub 5, jest o 9 mniejsza od sumy dziewięciu liczb podzielnych przez 3. To oznacza, że suma cyfr liczby n jest podzielna przez 3 i w konsekwencji — również liczba n jest podzielna przez 3.

4. Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest

$\boxed{\text{N}}$ a) mniejsza od $\sqrt{5}$;

$\boxed{\text{N}}$ b) równa $\sqrt{5}$;

$\boxed{\text{T}}$ c) większa od $\sqrt{5}$.

Komentarz

Ponieważ $\sqrt{3}>\sqrt{2}$ oraz $\sqrt{8}>\sqrt{5}$, więc $\sqrt{2}+\sqrt{3}>\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}>\sqrt{5}$.

5. Istnieje pięciokąt, który można rozciąć wzdłuż przekątnej na dwa wielokąty

$\boxed{\text{T}}$ a) o równych polach;

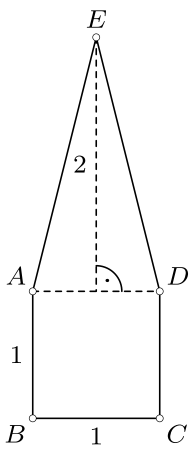
$\boxed{\text{T}}$ b) o równych obwodach.

$\boxed{\text{T}}$ c) foremne.

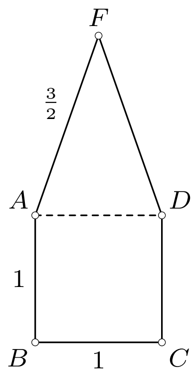
Komentarz

Niech $ABCD$ będzie kwadratem o boku 1.

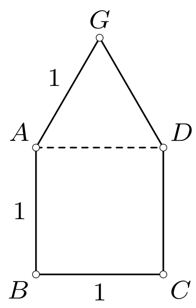
a) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujmy trójkąt równoramienny ADE, w którym $AE=DE$ oraz wysokość poprowadzona z wierzchołka E ma długość 2 (rys. 1). Wówczas pięciokąt $ABCDE$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty o polu 1.



rys. 1



rys. 2



rys. 3

b) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujmy trójkąt równoramienny ADF, w którym $AF=DF=\frac{3}{2}$ (rys. 2). Wówczas pięciokąt $ABCDF$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty o obwodzie 4.

c) Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ zbudujmy trójkąt równoboczny ADG (rys. 3). Wówczas pięciokąt $ABCDG$ można wzdłuż przekątnej AD rozciąć na dwa wielokąty foremne.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

6. Istnieją cztery kolejne liczby całkowite, których suma jest podzielna przez

T a) 18;

T b) 19;

N c) 20.

Komentarz

a) Liczba $3+4+5+6=18$ jest podzielna przez 18.

b) Liczba $8+9+10+11=38$ jest podzielna przez 19.

c) Suma czterech kolejnych liczb całkowitych, najmniejszą z których jest n, wynosi

$$n+(n+1)+(n+2)+(n+3)=4n+6=2(2n+3).$$

Dla każdej liczby całkowitej n liczba $2n+3$ jest nieparzysta, więc liczba $2(2n+3)$ nie jest podzielna przez 4. Nie jest to więc także liczba podzielna przez $4\cdot 5=20$.

7. Istnieją liczby rzeczywiste a, b, c spełniające warunek $a<b<c$, których średnia arytmetyczna jest

N a) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz b;

T b) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb b oraz c;

T c) mniejsza od średniej arytmetycznej liczb a oraz c.

Komentarz

a) Skoro $c>a$ oraz $c>b$, to $2c>a+b$, czyli $c>\frac{a+b}{2}$. Wobec tego

$$\frac{a+b+c}{3}>\frac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3}=\frac{\frac{3(a+b)}{2}}{3}=\frac{a+b}{2}.$$

b), c) Jeżeli $a=1$, $b=2$, $c=6$, to średnia arytmetyczna liczb a, b, c jest równa $\frac{a+b+c}{3}=3$, więc jest mniejsza od każdej z liczb $\frac{a+c}{2}=3,5$ oraz $\frac{b+c}{2}=4$.

8. Każdą dodatnią liczbę nieparzystą można przedstawić jako

N a) różnicę dwóch liczb pierwszych;

T b) różnicę dwóch liczb złożonych;

T c) różnicę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

Komentarz

a) Wykażemy, że liczby 7 nie można zapisać w postaci różnicy dwóch liczb pierwszych. Przypuśćmy, że $p-q=7$ dla pewnych liczb pierwszych p, q. Wówczas jedna z liczb p, q jest parzysta, a druga — nieparzysta. Jedyną parzystą liczbą pierwszą jest 2, a ponieważ

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana
ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

$p > 7$, więc wynika z tego, że $q = 2$. Jednak wówczas uzyskujemy $p = 9$, a to jest liczba złożona. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie jest możliwe przedstawienie liczby 7 w postaci różnicy dwóch liczb pierwszych.

b) Zauważmy, że $1 = 9 - 8$ jest szukanym przedstawieniem liczby 1. Jeżeli $n \geqslant 3$ jest liczbą nieparzystą, to $n = 3n - 2n$. Każda z liczb $3n$ oraz $2n$ jest złożona, bo jest iloczynem dwóch liczb całkowitych większych od 1.

c) Każdą dodatnią liczbę nieparzystą można zapisać w postaci $2k - 1$, gdzie $k \geqslant 1$ jest liczbą całkowitą. Wówczas $2k - 1 = k^2 - (k-1)^2$ jest przedstawieniem liczby $2k - 1$ w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

9. Liczby rzeczywiste x i y spełniają warunek $x - y \geqslant x^2$. Wynika z tego, że

N a) $x \geqslant 0$;

N b) $y \leqslant 0$;

T c) $x \geqslant y$.

Komentarz

a) Jeśli $x = -1$ oraz $y = -2$, to dany warunek jest spełniony oraz $x < 0$.

b) Jeśli $x = \frac{1}{2}$ oraz $y = \frac{1}{4}$, to dany warunek jest spełniony oraz $y > 0$.

c) Skoro $x^2 \geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, to z danego warunku uzyskujemy, że $x - y \geqslant 0$, czyli $x \geqslant y$.

10. Istnieje trójkąt prostokątny, w którym długości wszystkich boków są liczbami całkowitymi, a ponadto

T a) długość dokładnie jednego boku jest parzysta;

N b) długości dokładnie dwóch boków są parzyste;

T c) długości wszystkich trzech boków są parzyste.

Komentarz

a) Trójkąt o bokach długości 3, 4, 5 jest prostokątny i ma dokładnie jeden bok o parzystej długości.

c) Trójkąt o bokach długości 6, 8, 10 jest prostokątny i ma wszystkie trzy boki o parzystej długości.

b) Załóżmy, że pewien trójkąt prostokątny ma przyprostokątne o długości a, b oraz przeciwprostokątną o długości c, przy czym liczby a, b, c są całkowite. W myśl twierdzenia Pitagorasa zachodzi równość $a^2 + b^2 = c^2$. To oznacza, że liczba $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$ jest parzysta, więc wśród składników a^2, b^2, c^2 jest parzysta liczba liczb nieparzystych. W konsekwencji wśród liczb a, b, c jest parzysta liczba liczb nieparzystych. Nie jest więc możliwe, że dokładnie dwie z tych liczb są parzyste.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

11. Punkt P leży wewnątrz trójkąta prostokątnego ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ oraz $AC > BC$. Wynika z tego, że

T	a) $\sphericalangle APB > 90^\circ$;
N	b) $\sphericalangle APC > 90^\circ$;
N	c) $\sphericalangle APC > \sphericalangle BPC$.

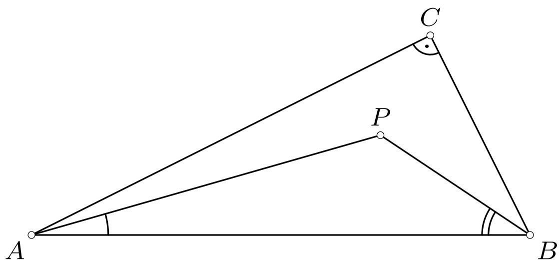
Komentarz

a) Zauważmy, że $\sphericalangle PAB < \sphericalangle CAB$ oraz $\sphericalangle PBA < \sphericalangle CBA$ (rys. 4). Zatem

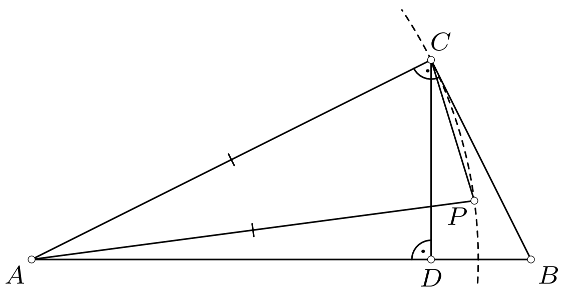
$$\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA < \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle ACB = 90^\circ.$$

W konsekwencji

$$\sphericalangle APB = 180^\circ - (\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA) > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$



rys. 4



rys. 5

b), c) Rozważmy dowolny trójkąt prostokątny ABC spełniający warunki zadania. Wybierzmy punkt P wewnątrz trójkąta w taki sposób, aby znalazł się na okręgu o środku A i promieniu AC, tzn. $AP = AC$ (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle APC < 90^\circ$, gdyż jest to kąt między podstawą i ramieniem w trójkącie równoramiennym ACP.

Niech D będzie spodkiem wysokości trójkąta ABC poprowadzonej z wierzchołka C. Wówczas punkt P znajduje się wewnątrz trójkąta prostokątnego BCD. Stosując udowodniony już punkt a) do tego trójkąta, otrzymujemy $\sphericalangle BPC > 90^\circ$. W połączeniu z nierównością $\sphericalangle APC < 90^\circ$ oznacza to, że $\sphericalangle BPC > \sphericalangle APC$.

12. Tablica o wymiarach 4×4 składa się z kwadratowych pól o boku 1. Dokładnie osiem pól tej tablicy jest koloru czarnego. Wynika z tego, że środki pewnych dwóch z tych ośmiu pól są odległe o

N	a) 1;
N	b) $\sqrt{2}$;
N	c) 2.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

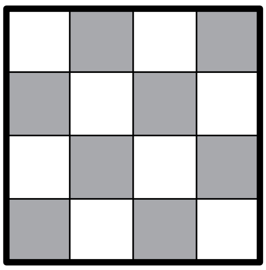
Ministerstwo Edukacji Narodowej

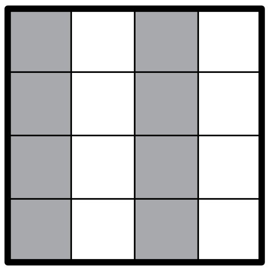
Komentarz

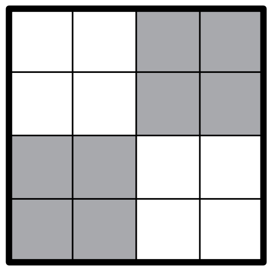
a) Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 6 (w „szachownicę”), to żadne dwa czarne pola nie sąsiadują bokiem. Wobec tego środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o 1.

b) Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 7 (w „paski”), to żadne dwa czarne pola nie stykają się tylko rogiem. Wobec tego środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o $\sqrt{2}$.

c) Pola o środkach odległych o 2 to pola w tym samym wierszu lub kolumnie, między którymi znajduje się dokładnie jedno inne pole. Jeżeli tablica pokolorowana jest tak, jak na rysunku 8, to środki żadnych dwóch czarnych pól nie są odległe o 2.


rys. 6


rys. 7


rys. 8

13. Z każdych pięciu dodatnich liczb całkowitych można wybrać

$\boxed{\text{T}}$ a) takie dwie, których suma jest podzielna przez 2;

$\boxed{\text{T}}$ b) takie trzy, których suma jest podzielna przez 3;

$\boxed{\text{N}}$ c) takie cztery, których suma jest podzielna przez 4.

Komentarz

a) Wśród dowolnych pięciu (a nawet wśród dowolnych trzech) liczb całkowitych są albo co najmniej dwie liczby parzyste, albo co najmniej dwie liczby nieparzyste. Zarówno suma dwóch liczb parzystych, jak i suma dwóch liczb nieparzystych, jest liczbą podzielną przez 2.

b) Rozważmy dowolne pięć liczb całkowitych i obliczmy reszty z dzielenia tych liczb przez 3. Są dwa możliwe przypadki:

- Pewna reszta r pojawia się co najmniej trzykrotnie.

  Wybierzmy dowolne trzy liczby dające tę resztę z dzielenia przez 3, tzn. liczby postaci $3a+r$, $3b+r$, $3c+r$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c. Suma wybranych liczb jest równa

$$(3a+r)+(3b+r)+(3c+r)=3(a+b+c+r),$$

  więc jest to liczba podzielna przez 3.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

- Każda z reszt 0, 1, 2 pojawia się co najwyżej dwukrotnie.

  Skoro liczb jest pięć, to każda z tych reszt pojawia się co najmniej raz. Wybierzmy po jednej liczbie dla każdej z tych reszt, tzn. liczby postaci $3a$, $3b+1$, $3c+2$ dla pewnych liczb całkowitych a, b, c. Suma tych trzech liczb jest równa

$$3a+(3b+1)+(3c+2)=3(a+b+c+1),$$

  więc jest podzielna przez 3.

c) Rozważmy liczby 1, 2, 4, 8, 12. Żadna z sum czterech spośród tych pięciu liczb:

$$1+2+4+8=15,\ 1+2+4+12=19,\ 1+2+8+12=23,\ 1+4+8+12=25,\ 2+4+8+12=26$$

nie jest liczbą podzielną przez 4.

14. Każda dodatnia liczba całkowita została pokolorowana albo na czerwono, albo na niebiesko. Wynika z tego, że

N a) pewna liczba większa od 1 ma ten sam kolor, co jej wszystkie dodatnie dzielniki;

N b) pewna liczba ma ten sam kolor, co jej dwukrotność;

N c) pewne dwie liczby różniące się o 20 mają ten sam kolor.

Komentarz

a) Jeżeli liczba 1 jest czerwona, a wszystkie pozostałe liczby są niebieskie, to każda liczba większa od 1 ma dodatni dzielnik w innym kolorze niż swój własny kolor (mianowicie dzielnik równy 1).

b) Rozważmy kolorowanie, w którym wszystkie liczby mające parzystą liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze są czerwone, a wszystkie liczby mające nieparzystą liczbę dwójek w rozkładzie na czynniki pierwsze są niebieskie. Wówczas każda liczba ma inny kolor niż jej dwukrotność.

c) Rozważmy kolorowanie, w którym czerwone są liczby dające przy dzieleniu przez 40 jedną z reszt 0, 1, 2, ..., 19, a niebieskie są liczby dające przy dzieleniu przez 40 jedną z reszt 20, 21, 22, ..., 39. Wówczas każde dwie liczby różniące się o 20 mają różny kolor.

15. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle ADC=\sphericalangle BEC$. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Wynika z tego, że

T a) $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBE$;

N b) $\sphericalangle ACP=\sphericalangle BCP$;

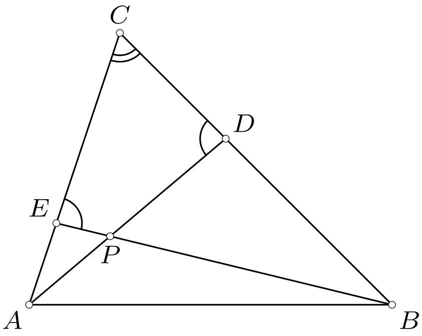
T c) $\sphericalangle DEP=\sphericalangle BAP$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

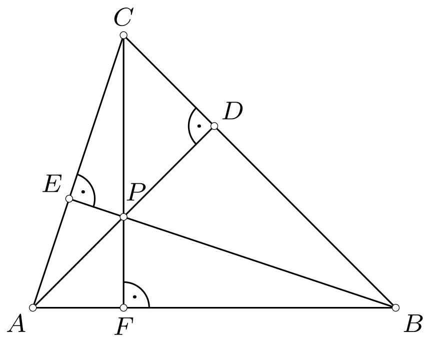
Komentarz

a) Korzystając z własności sumy miar kątów wewnętrznych w trójkątach ACD i BCE (rys. 9), otrzymujemy

$$\sphericalangle CAD = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle ADC = 180^\circ - \sphericalangle ACB - \sphericalangle BEC = \sphericalangle CBE.$$



rys. 9



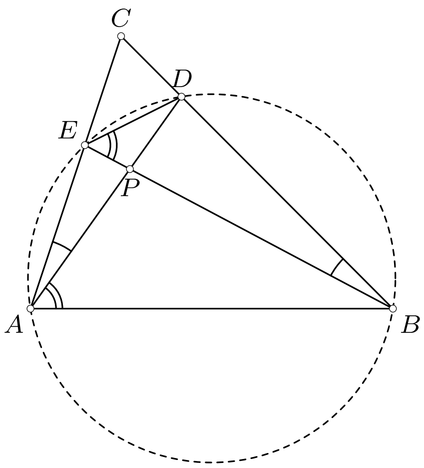
rys. 10

b) Rozważmy dowolny trójkąt ostrokątny ABC, w którym $\sphericalangle BAC \neq \sphericalangle ABC$. Oznaczmy przez D oraz E spodki wysokości poprowadzonych odpowiednio z wierzchołków A oraz B (rys. 10). Wówczas $\sphericalangle ADC = 90^\circ = \sphericalangle BEC$.

Punkt P jest przecięciem dwóch spośród wysokości trójkąta ABC, więc leży także na trzeciej wysokości. To oznacza, że jeżeli przez F oznaczymy punkt przecięcia prostej CP i boku AB, to $\sphericalangle AFC = \sphericalangle BFC = 90^\circ$. W konsekwencji

$$\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACF = 90^\circ - \sphericalangle BAC \neq 90^\circ - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCF = \sphericalangle BCP.$$

c) Z udowodnionej w punkcie a) równości $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DBE$ oraz tego, że punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej DE wynika, że na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg (rys. 11). W konsekwencji $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DEB = \sphericalangle DAB = \sphericalangle BAP$.



rys. 11

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej