

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia
(10 stycznia 2026 r.)



1. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na odcinku CD leżą takie punkty X i Y , że

$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XAD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle YBA = \sphericalangle YBC.$$

Wykaż, że $CX = DY$.

2. W zapisie dziesiętnym dodatniej liczby całkowitej n każda cyfra jest różna od 0 oraz żadna cyfra nie pojawia się więcej niż raz. Ponadto liczba n jest podzielna przez każdą ze swoich cyfr. Wykaż, że liczba n ma co najwyżej 7 cyfr.

3. Pola prostokątnej planszy 1×100 są ponumerowane kolejno liczbami całkowitymi od 1 do 100. Pionek początkowo stał na polu o numerze n . W pierwszym ruchu przesunięto go o jedno pole, w drugim — o dwa pola, w trzecim — o trzy pola itd. Okazało się, że po wykonaniu 99 ruchów pionek odwiedził każde pole dokładnie raz. Wyznacz wszystkie możliwe wartości n .

Uwaga. Przesunięcie pionka o k pól oznacza bezpośrednie przemieszczenie go między polami, których numery różnią się o k .

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB oraz CD . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AB i CD , przy czym $AQ = BQ$ oraz $CP = DP$. Wykaż, że $AP + DQ = BP + CQ$.

5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a, b, c o tej własności, że każda z liczb ab, bc, ca jest większa od $a + b + c$. Wykaż, że

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$