

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (10 stycznia 2026 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Dany jest równoległobok $ABCD$. Na odcinku CD leżą takie punkty X i Y , że

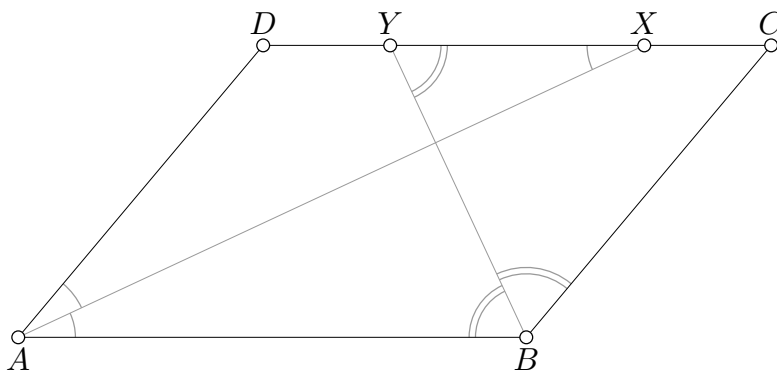
$$\sphericalangle XAB = \sphericalangle XAD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle YBA = \sphericalangle YBC.$$

Wykaż, że $CX = DY$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\sphericalangle XAD = \sphericalangle XAB = \sphericalangle AXD$, więc trójkąt ADX jest równoramienny i $AD = DX$. Podobnie skoro $\sphericalangle YBC = \sphericalangle YBA = \sphericalangle BYC$, to $BC = CY$. Pozostaje zauważyć, że $AD = BC$ i w konsekwencji

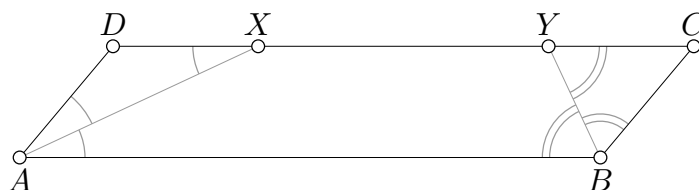
$$CX = CD - DX = CD - AD = CD - BC = CD - CY = DY.$$



rys. 1

Uwaga

Punkty X oraz Y mogą leżeć na odcinku CD w innej kolejności niż na rys. 1 (rys. 2). Zaprezentowane rozwiązanie jest poprawne w obydwu konfiguracjach.



rys. 2

2. W zapisie dziesiętnym dodatniej liczby całkowitej n każda cyfra jest różna od 0 oraz żadna cyfra nie pojawia się więcej niż raz. Ponadto liczba n jest podzielna przez każdą ze swoich cyfr. Wykaż, że liczba n ma co najwyżej 7 cyfr.

Rozwiązanie

Skoro żadna cyfra w zapisie n nie pojawia się więcej niż raz oraz w zapisie n nie występuje cyfra 0, to liczba n ma co najwyżej 9 cyfr.

Zauważmy, że w zapisie liczby n nie mogą występować jednocześnie cyfry 2 oraz 5, gdyż wówczas liczba n , jako podzielna przez 2 oraz 5, musiałaby być zakończona cyfrą 0. W konsekwencji liczba n nie może być 9-cyfrowa.

Pozostaje uzasadnić, że liczba n nie może być 8-cyfrowa. Rzeczywiście, gdyby liczba n miała 8 cyfr, to wobec obserwacji poczynionej w poprzednim akapicie brakującą cyfrą byłaby jedna z cyfr 2 lub 5. Jednak wówczas liczba n posiadałaby w zapisie cyfrę 3, ale suma cyfr liczby n byłaby równa

$$(1+2+3+4+5+6+7+8+9) - 2 = 43 \quad \text{lub} \quad (1+2+3+4+5+6+7+8+9) - 5 = 40,$$

a więc niepodzielna przez 3. Liczba n nie byłaby więc podzielna przez 3. Uzyskana sprzeczność oznacza, że liczba n nie może być 8-cyfrowa.

Uwaga

Największą liczbą spełniającą warunki zadania jest $n = 9867312$.

3. Pola prostokątnej planszy 1×100 są ponumerowane kolejno liczbami całkowitymi od 1 do 100. Pionek początkowo stał na polu o numerze n . W pierwszym ruchu przesunięto go o jedno pole, w drugim — o dwa pola, w trzecim — o trzy pola itd. Okazało się, że po wykonaniu 99 ruchów pionek odwiedził każde pole dokładnie raz. Wyznacz wszystkie możliwe wartości n .

Uwaga. Przesunięcie pionka o k pól oznacza bezpośrednie przemieszczenie go między polami, których numery różnią się o k .

Rozwiązanie

Odpowiedź: Jedyne możliwe wartości n to **50** oraz **51**.

Zauważmy, że w ostatnim z wykonanych 99 ruchów pionek został przesunięty o 99 pól, czyli pomiędzy skrajnymi polami planszy.

Jeżeli w ostatnim ruchu pionek stanął na polu o numerze 100, to w początkowych 98 ruchach odwiedził każde pole o numerze od 1 do 99 i stanął na polu numer 1. To oznacza, że w ruchu o numerze 98 został przesunięty z pola numer 99, a w początkowych 97 ruchach odwiedził wszystkie pola o numerach od 2 do 99. Powtarzając wielokrotnie analogiczne rozumowanie, stwierdzamy, że jedyną możliwą sekwencją numerów pól kolejno odwiedzanych przez pionek (zapisaną od tyłu) w tym przypadku jest

$$100 \leftarrow 1 \leftarrow 99 \leftarrow 2 \leftarrow 98 \leftarrow 3 \leftarrow 97 \leftarrow 4 \leftarrow \dots \leftarrow 52 \leftarrow 49 \leftarrow 51 \leftarrow 50,$$

czyli $n = 50$.

Jeżeli w ostatnim ruchu pionek został przesunięty z pola numer 100 na pole numer 1, to w pełni analogicznie stwierdzamy, że jedyną możliwą sekwencją kolejnych numerów pól jest

$$1 \leftarrow 100 \leftarrow 2 \leftarrow 99 \leftarrow 3 \leftarrow 98 \leftarrow 4 \leftarrow 97 \leftarrow \dots \leftarrow 49 \leftarrow 52 \leftarrow 50 \leftarrow 51,$$

czyli $n = 51$.

Uwaga

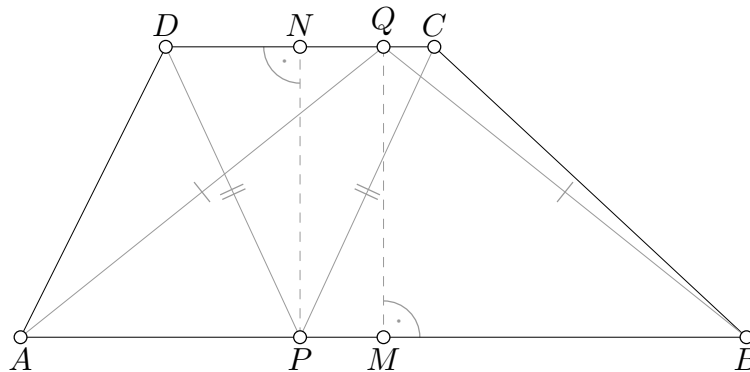
Przedstawione rozumowanie można w naturalny sposób uogólnić na przypadek planszy o wymiarach $1 \times m$, gdzie $m \geq 2$ jest liczbą całkowitą. Dla każdego takiego m są dokładnie dwie sekwencje ruchów prowadzących do odwiedzenia wszystkich pól — jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to obie zaczynają się od pola $n = \frac{m+1}{2}$, a w przypadku, gdy m jest liczbą parzystą są dwa możliwe pola początkowe: $n = \frac{m}{2}$ oraz $n = \frac{m}{2} + 1$.

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB oraz CD . Punkty P i Q leżą odpowiednio na odcinkach AB i CD , przy czym $AQ=BQ$ oraz $CP=DP$. Wykaż, że $AP+DQ=BP+CQ$.

Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez M oraz N odpowiednio środki podstaw AB i CD danego trapezu. Załóżmy, że punkt P leży na odcinku AM (rys. 3); rozumowanie w przypadku, gdy P leży na odcinku BM jest w pełni analogiczne.



rys. 3

Zauważmy, że odcinek MQ jest wysokością trójkąta równoramiennego ABQ , a odcinek NP jest wysokością trójkąta równoramiennego CDP . Wobec tego czworokąt $PMQN$ jest prostokątem i w konsekwencji $PM=QN$ oraz punkt Q leży na odcinku CN . Zatem

$$AP+DQ=(AM-PM)+(DN+QN)=AM+DN=\frac{1}{2}(AB+CD)$$

oraz

$$BP+CQ=(BM+PM)+(CN-QN)=BM+CN=\frac{1}{2}(AB+CD).$$

Uwaga

Ponieważ czworokąty $APQD$ oraz $BPQC$ są trapezami o równych wysokościach, więc teza zadania jest równoważna równości pól tych dwóch trapezów. Wystarczy więc na przykład wykazać, że $[APQD]=\frac{1}{2}[ABCD]$, gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Po wprowadzeniu punktów M i N rozwiązanie można więc dokończyć zauważając, że

$$[APQD]=[APND]+[PQN]=[APND]+[PMN]=[AMND]=\frac{1}{2}[ABCD],$$

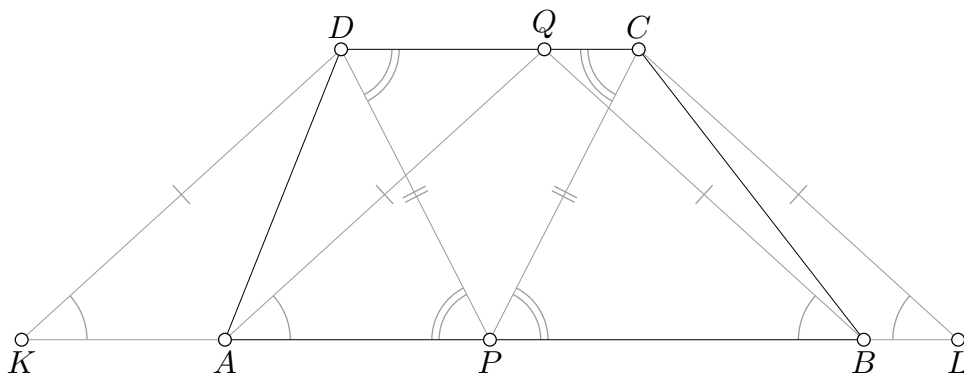
przy czym ostatnia równość wynika z tego, że suma długości podstaw trapezu $AMND$ jest równa połowie sumy długości podstaw trapezu $ABCD$.

Sposób II

Oznaczmy przez K oraz L takie punkty leżące na przedłużeniu odcinka AB , że czworokąty $AQDK$ oraz $BQCL$ są równoległobokami (rys. 4). Wówczas

$$AP+DQ=AP+AK=PK \quad \text{oraz} \quad BP+CQ=BP+BL=PL,$$

więc teza zadania jest równoważna równości $PK=PL$.



rys. 4

Wykażemy, że trójkąty PDK oraz PCL są przystające, co zakończy dowód. Rzeczywiście, mamy bowiem $PD = PC$, $DK = AQ = BQ = CL$ oraz

$$\begin{aligned}\angle PDK &= 180^\circ - \angle PKD - \angle KPD = 180^\circ - \angle BAQ - \angle PDC = \\ &= 180^\circ - \angle ABQ - \angle PCD = 180^\circ - \angle PLC - \angle LPC = \angle PCL,\end{aligned}$$

więc trójkąty PDK oraz PCL są przystające na mocy cechy bok–kąt–bok.

5. Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a , b , c o tej własności, że każda z liczb ab , bc , ca jest większa od $a + b + c$. Wykaż, że

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1.$$

Rozwiązanie

Sposób I

Z warunków zadania wynika, że

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{ab} < \frac{b}{a+b+c}, \quad \frac{1}{b} = \frac{c}{bc} < \frac{c}{a+b+c}, \quad \frac{1}{c} = \frac{a}{ca} < \frac{a}{a+b+c}.$$

Dodając stronami te trzy nierówności, uzyskujemy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{a+b+c} = \frac{b+c+a}{a+b+c} = 1.$$

Sposób II

Skoro liczby a , b , c są dodatnie, to dowodzoną nierówność można przekształcić równoważnie do postaci

$$bc + ca + ab < abc.$$

Założmy, że c jest największą spośród liczb a , b , c — rozumowanie w pozostałych przypadkach jest w pełni analogiczne. Wówczas $c \geq a$ oraz $c \geq b$, więc skoro liczby a , b , c są dodatnie, to $c^2 \geq ab$. W konsekwencji

$$abc = ab \cdot c > (a + b + c) \cdot c = ac + bc + c^2 \geq ac + bc + ab,$$

co jak wcześniej zauważyliśmy jest równoważne tezie zadania.