

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia
(14 marca 2026 r.)



1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że w wyniku dopisania do zapisu dziesiętnego liczby n^2 dodatkowej cyfry 1 z lewej strony powstaje zapis dziesiętny liczby n^3 .
2. W pewnym trójkącie miary kątów wewnętrznych są równe a° , b° , c° , przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Wykaż, że trójkąt ten jest ostrokątny.
3. W turnieju szachowym uczestniczyło 101 osób. Każda para uczestników rozegrała dokładnie jedną partię, która zakończyła się zwycięstwem jednego z nich albo remisem. Czy mogło się zdarzyć, że każdy uczestnik tego turnieju wygrał dokładnie tyle samo partii, ile zremisował? Odpowiedź uzasadnij.
4. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na boku BC , a punkt E leży wewnątrz trójkąta ABD , przy czym

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD = \sphericalangle DAC.$$

Wykaż, że jeżeli punkty A , C , D , E leżą na jednym okręgu, to trójkąt ABC jest równoramienny.

5. W każde pole planszy 21×21 wpisano jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4. Jeżeli w pewne pole wpisano liczbę n , to w dokładnie n pól z nim sąsiadujących również wpisano liczbę n . Przykładowo każde pole z liczbą 2 sąsiaduje z dokładnie dwoma innymi polami z liczbą 2. Wykaż, że liczba pól, w które wpisano 0, jest nieparzysta.

Uwaga. Pola *sąsiadują*, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.