

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody trzeciego stopnia (14 marca 2026 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 1$ o tej własności, że w wyniku dopisania do zapisu dziesiętnego liczby n^2 dodatkowej cyfry 1 z lewej strony powstaje zapis dziesiętny liczby n^3 .

Rozwiązanie

Sposób I

Założmy, że pewna liczba $n \geq 1$ spełnia warunki zadania i oznaczmy przez k liczbę cyfr liczby n^2 , tzn. $10^{k-1} \leq n^2 < 10^k$. Opisana w treści zadania własność przybiera więc postać

$$10^k + n^2 = n^3, \quad \text{czyli} \quad 10^k = n^2(n-1).$$

Z nierówności $n^2 \geq 10^{k-1}$ oraz $n-1 \geq 0$ wynika, że $n^2(n-1) \geq 10^{k-1}(n-1)$. Otrzymujemy więc nierówność

$$10^k \geq 10^{k-1}(n-1), \quad \text{czyli} \quad 10 \geq n-1,$$

co oznacza, że $n \leq 11$. Bezpośrednio sprawdzając wartości n od 1 do 11 (np. wypisując zapisy dziesiętne kwadratów i sześcianów) identyfikujemy jedyne rozwiązanie zadania: $n = 5$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331
	X	X	X	X	✓	X	X	X	X	X	X

Uwaga

Liczbę przypadków do bezpośredniego sprawdzenia można znacznie ograniczyć za pomocą dodatkowych rozumowań. Przykładowo:

- skoro ostatnie cyfry liczb n^2 oraz n^3 są równe, to liczba n może być zakończona wyłącznie cyfrą 0, 1, 5 lub 6;
- skoro $n^2(n-1) = 10^k$, to liczba n^2 jest dzielnikiem liczby 10^k i w konsekwencji jedynymi możliwymi dzielnikami pierwszymi liczby n są 2 oraz 5;
- dla $6 \leq n \leq 9$ mamy $216 \leq n^3 \leq 729$, więc pierwszą cyfrą liczby n^3 nie może być 1.

Sposób II

Jeżeli A jest liczbą k -cyfrową, czyli $A \geq 10^{k-1}$, oraz $n \geq 20$, to

$$A \cdot n \geq 10^{k-1} \cdot 20 = 2 \cdot 10^k,$$

czyli $A \cdot n$ nie może być liczbą $(k+1)$ -cyfrową rozpoczynającą się od cyfry 1. Przyjmując $A = n^2$, otrzymujemy wniosek, że jeżeli $n \geq 20$, to n nie spełnia warunków zadania. Pozostaje bezpośrednio sprawdzić, że wśród liczb mniejszych od 20 tylko $n = 5$ spełnia warunki zadania.

2. W pewnym trójkącie miary kątów wewnętrznych są równe $a^\circ, b^\circ, c^\circ$, przy czym $a^2 + b^2 = c^2$. Wykaż, że trójkąt ten jest ostrokątny.

Rozwiązanie

Sposób I

Jeżeli liczby dodatnie a, b, c spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to c jest największą z liczb a, b, c . Rzeczywiście, skoro $a^2 > 0$ oraz $b^2 > 0$, to

$$c^2 = a^2 + b^2 > a^2 \quad \text{oraz} \quad c^2 = a^2 + b^2 > b^2,$$

a skoro liczby a, b, c są dodatnie, to z powyższych nierówności wynika, że $c > a$ oraz $c > b$.

Założmy, że trójkąt o miarach kątów wewnętrznych $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ spełnia warunki zadania. Aby udowodnić, że jest to trójkąt ostrokątny, wystarczy uzasadnić, że największy z jego kątów ma miarę mniejszą od 90° , czyli $c < 90$.

Zauważmy, że ponieważ $ab > 0$, więc

$$c^2 = a^2 + b^2 < a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

i w konsekwencji, skoro liczby $a + b$ oraz c są dodatnie, otrzymujemy nierówność $c < a + b$. Ponieważ $a + b = 180 - c$, więc z otrzymanej nierówności wynika, że

$$c < 180 - c, \quad \text{czyli} \quad c < 90.$$

Sposób II

Założmy, że pewien trójkąt T o miarach kątów wewnętrznych $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ spełnia warunki zadania. Rozważmy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a, b . Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że przeciwprostokątna tego trójkąta ma długość c . Przeciwprostokątna jest najdłuższym bokiem trójkąta prostokątnego, a jej długość jest mniejsza od sumy długości przyprostokątnych (na mocy nierówności trójkąta), co oznacza, że $c > a$, $c > b$ oraz $a + b > c$.

Ponieważ $a^\circ, b^\circ, c^\circ$ są miarami kątów wewnętrznych trójkąta T , więc $a + b + c = 180$. Stąd oraz z nierówności $a + b > c$ wynika, że

$$180 = a + b + c > 2c, \quad \text{czyli} \quad 90 > c.$$

W połączeniu z $c > a$ oraz $c > b$ uzyskujemy również $90 > a$ oraz $90 > b$. Skoro każdy kąt wewnętrzny trójkąta T jest ostry, to trójkąt T jest ostrokątny.

Uwaga

Istnieje nieskończenie wiele trójek miar kątów wewnętrznych trójkąta (a, b, c) spełniających warunki zadania (długości boków dowolnego trójkąta prostokątnego o obwodzie równym 180 odpowiadają takiej trójce).

Jeżeli natomiast przyjmiemy dodatkowe założenia, że liczby a, b, c są całkowite oraz $a \leq b$, to istnieją tylko trzy takie trójki:

$$(45, 60, 75), \quad (30, 72, 78) \quad \text{oraz} \quad (18, 80, 82).$$

Można również udowodnić, że najmniejsza możliwa wartość c w trójkącie spełniającym warunki zadania jest równa $\frac{180}{1 + \sqrt{2}} \approx 74,56$.

3. W turnieju szachowym uczestniczyło 101 osób. Każda para uczestników rozegrała dokładnie jedną partię, która zakończyła się zwycięstwem jednego z nich albo remisem. Czy mogło się zdarzyć, że każdy uczestnik tego turnieju wygrał dokładnie tyle samo partii, ile zremisował? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Przyznajmy w każdej partii 2 punkty w następujący sposób:

- jeżeli partia zakończyła się zwycięstwem jednego z zawodników, to zwycięzca otrzymuje 2 punkty, a przegrany — 0 punktów;
- jeżeli partia zakończyła się remisem, to obaj zawodnicy otrzymują po 1 punkcie.

Łączna liczba punktów przyznanych w całym turnieju jest równa dwukrotności liczby rozegranych partii, czyli $101 \cdot 100$.

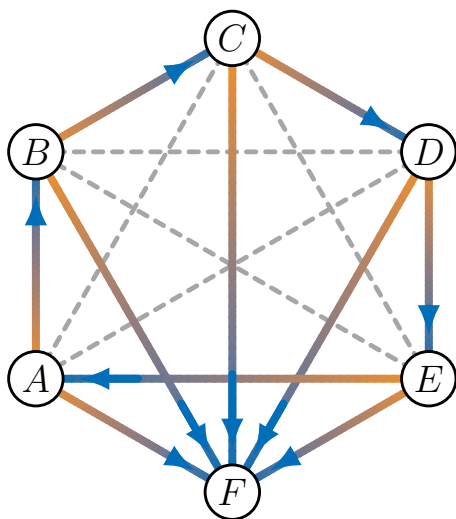
Załóżmy, że każdy zawodnik turnieju wygrał tyle samo partii, ile zremisował. Wówczas zawodnik, który wygrał i zremisował po k partii uzyskał $2 \cdot k + 1 \cdot k = 3k$ punktów, czyli liczbę punktów podzielną przez 3. Dodając wyniki wszystkich zawodników uzyskujemy więc również liczbę podzielną przez 3. Jednak liczba $101 \cdot 100$ nie jest podzielna przez 3. Uzyskana sprzeczność oznacza, że odpowiedź na postawione w treści zadania pytanie jest negatywna.

Sposób II

Podsumujmy rozstrzygnięcia partii w tabeli, w której kolumny odpowiadają zawodnikom oraz w kolumnie zawodnika Z :

- w pierwszym wierszu znajduje się liczba partii wygranych przez Z ;
- w drugim wierszu znajduje się liczba partii zremisowanych przez Z ;
- w trzecim wierszu znajduje się liczba partii przegranych przez Z .

Przykład turnieju z sześcioma zawodnikami oraz odpowiadającej temu turniejowi analogicznej tabeli przedstawiony jest poniżej (liniami przerywanymi oznaczono remisy, a strzałkami prowadzącymi od zwycięzcy do przegranego — partie rozstrzygnięte).



zawodnik	A	B	C	D	E	F	suma
wygrane	2	2	2	2	2	0	10
zremisowane	2	2	2	2	2	0	10
przegrane	1	1	1	1	1	5	10
wszystkie	5	5	5	5	5	5	30

Zauważmy, że suma liczb w każdej kolumnie tabeli jest równa 100, gdyż każdy zawodnik rozegrał dokładnie 100 partii. Wobec tego suma wszystkich liczb w tabeli jest równa $100 \cdot 101$.

Ponadto zauważmy, że w każdym turnieju suma wszystkich liczb w pierwszym wierszu jest równa sumie wszystkich liczb w trzecim wierszu — obie te liczby są bowiem równe liczbie wszystkich rozstrzygniętych partii w turnieju (czyli tych, które nie zakończyły się remisem).

Gdyby warunki zadania były spełnione, to pierwszy oraz drugi wiersz tabeli byłyby jednakowe, skąd wynika, że suma wszystkich liczb w pierwszym wierszu byłaby równa także sumie wszystkich liczb w drugim wierszu. Wówczas sumy liczb we wszystkich trzech wierszach byłyby równe, co oznacza, że suma wszystkich liczb w tabeli byłaby podzielna przez 3. Jednak liczba $100 \cdot 101$ nie jest podzielna przez 3, więc układ rozstrzygnięć partii, o którym mowa w treści zadania, nie jest możliwy.

4. Dany jest trójkąt ABC . Punkt D leży na boku BC , a punkt E leży wewnątrz trójkąta ABD , przy czym

$$\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BAE = \sphericalangle EAD = \sphericalangle DAC.$$

Wykaż, że jeżeli punkty A, C, D, E leżą na jednym okręgu, to trójkąt ABC jest równoramienny.

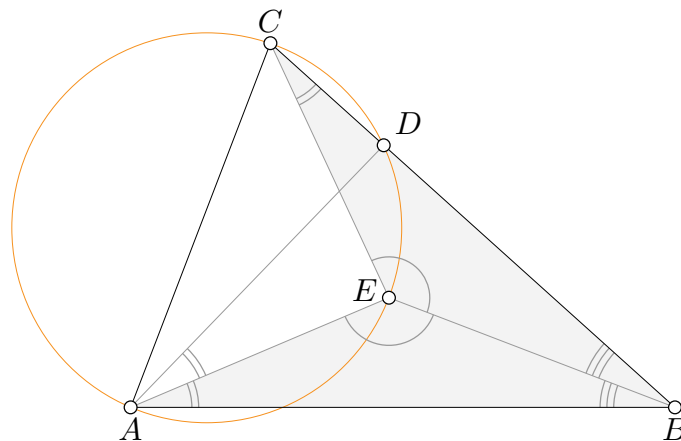
Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że $\sphericalangle ECD = \sphericalangle EAD$ (rys. 1) — są to kąty wpisane w okrąg opisany na czworokącie $ACDE$ oparte na tym samym łuku. W konsekwencji $\sphericalangle ECB = \sphericalangle ECD = \sphericalangle EAD = \sphericalangle BAE$. W połączeniu z równością $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CBE$ oznacza to, że

$$\sphericalangle BEA = 180^\circ - \sphericalangle BAE - \sphericalangle ABE = 180^\circ - \sphericalangle ECB - \sphericalangle CBE = \sphericalangle BEC.$$

Wobec tego trójkąty BEA oraz BEC są przystające (cecha kąt–bok–kąt) i w konsekwencji $AB = BC$, więc trójkąt ABC jest równoramienny.



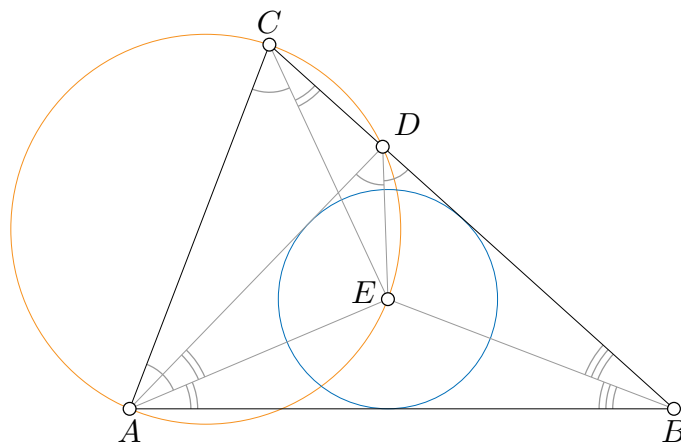
rys. 1

Uwaga

W przedstawionym rozwiązaniu nie została wykorzystana równość $\sphericalangle EAD = \sphericalangle DAC$. Teza zadania pozostaje więc spełniona po pominięciu tego założenia.

Sposób II

Zauważmy, że E jest punktem przecięcia dwusiecznych dwóch kątów wewnętrznych w trójkącie ABD , więc jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt i leży również na dwusiecznej kąta ADB , co oznacza, że $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDB$ (rys. 2).



rys. 2

Skoro czworokąt $ACDE$ jest wpisany w okrąg oraz $\sphericalangle EAD = \sphericalangle BAE$, to

$$\sphericalangle ECD = \sphericalangle EAD = \sphericalangle BAE.$$

Skoro czworokąt $ACDE$ jest wpisany w okrąg oraz $\sphericalangle ADE = \sphericalangle EDB$, to

$$\sphericalangle ACE = \sphericalangle ADE = \sphericalangle EDB = 180^\circ - \sphericalangle CDE = \sphericalangle EAC.$$

Otrzymujemy więc

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ECD + \sphericalangle ACE = \sphericalangle BAE + \sphericalangle EAC = \sphericalangle BAC,$$

co oznacza, że trójkąt ABC jest równoramienny.

5. W każde pole planszy 21×21 wpisano jedną z liczb 0, 1, 2, 3, 4. Jeżeli w pewne pole wpisano liczbę n , to w dokładnie n pól z nim sąsiadujących również wpisano liczbę n . Przykładowo każde pole z liczbą 2 sąsiaduje z dokładnie dwoma innymi polami z liczbą 2. Wykaż, że liczba pól, w które wpisano 0, jest nieparzysta.

Uwaga. Pola *sąsiadują*, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.

Rozwiązanie

Skoro liczba wszystkich pól planszy (równa 21^2) jest nieparzysta, to należy udowodnić, że łączna liczba wystąpień liczb 1, 2, 3, 4 jest parzysta. Udowodnimy, że każda z tych liczb występuje na planszy parzystą liczbę razy.

Liczba 1

Z warunków zadania wynika, że każda liczba 1 sąsiaduje z dokładnie jedną inną liczbą 1, co oznacza, że liczby 1 łączą się w pary tworzące prostokąty 1×2 . Zatem łączna liczba wystąpień liczb 1 jest parzysta.

Liczba 2

Zauważmy, że skoro każda liczba 2 sąsiaduje z dokładnie dwiema innymi liczbami 2, to liczby 2 tworzą *cykle*, czyli ciągi pól o tej własności, że każde dwa kolejne pola są sąsiednie, a ponadto pierwsze sąsiaduje z ostatnim. Rzeczywiście, oznaczmy przez P_1 dowolne pole z liczbą 2 (jeśli istnieje), przez P_2 — jedno z dwóch sąsiadujących z nim pól z liczbą 2, przez P_3 — to pole zawierające liczbę 2 sąsiadujące z P_2 , które jest różne od P_1 , przez P_4 — to pole zawierające liczbę 2 sąsiadujące z P_3 , które jest różne od P_2 itd.

Ponieważ liczba pól planszy jest skończona, więc w pewnym momencie oznaczmy to samo pole po raz drugi. Niech n będzie największą taką liczbą, że pola $P_1, P_2, \dots, P_n$ są parami różne (czyli żadne dwa z nich nie są równe). Wówczas $P_{n+1} = P_i$ dla pewnego $i \leq n-2$. Wykażemy, że $i=1$, czyli pole P_n sąsiaduje z polem P_1 . Gdyby $2 \leq i \leq n-2$, to pole P_i sąsiadowałoby z trzema różnymi polami zawierającymi liczbę 2: P_{i-1} , P_{i+1} oraz P_n , co jest sprzeczne z warunkami zadania.

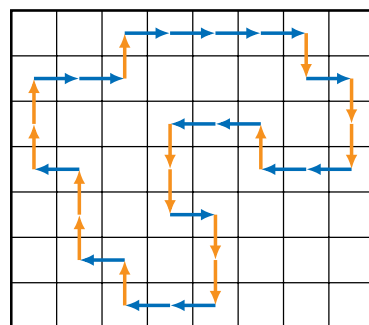
Wykażemy, że w każdym tak uzyskanym cyklu pól $P_1, P_2, \dots, P_n$ zawierających liczbę 2 liczba pól jest parzysta. Wyniknie stąd, że łączna liczba wystąpień liczby 2 we wszystkich cyklach jest parzysta.

Sposób I

Pomalujmy pola planszy w standardową szachownicę, czyli dwoma kolorami w taki sposób, aby każde dwa sąsiadujące pola miały różny kolor. Wówczas pola $P_1, P_3, P_5, \dots$ są jednego koloru, a pola $P_2, P_4, P_6, \dots$ — drugiego. Ponieważ P_1 i P_n sąsiadują, więc mają różny kolor, a to oznacza, że n jest liczbą parzystą.

1	1	2	2	2	2	2	0
2	2	2	1	1	0	2	2
2	0	1	2	2	2	0	2
2	2	1	2	0	2	2	2
0	2	0	2	2	0	1	1
1	2	2	0	2	1	2	2
1	0	2	2	2	1	2	2

		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_{28}	P_{29}	P_{30}				P_6	P_7
P_{27}			P_{14}	P_{13}	P_{12}		P_8
P_{26}	P_{25}		P_{15}		P_{11}	P_{10}	P_9
	P_{24}		P_{16}	P_{17}			
	P_{23}	P_{22}		P_{18}			
		P_{21}	P_{20}	P_{19}			



Sposób II

Ułożmy planszę w taki sposób na płaszczyźnie, aby odcinki łączące środki sąsiadujących pól były pionowe lub poziome. Wyobraźmy sobie, że pewna figura odwiedziła kolejno pola $P_1, P_2, \dots, P_n$ i wróciła na pole P_1 . Ponieważ figura wróciła do punktu wyjścia, więc łączna liczba ruchów wykonanych w prawo jest równa łącznej liczbie wykonanych ruchów w lewo. To zaś oznacza, że łączna liczba wykonanych ruchów poziomych jest parzysta. Podobnie uzasadniamy, że łączna liczba wykonanych ruchów pionowych jest parzysta (było tyle samo ruchów w górę i w dół) i w konsekwencji — parzysta jest łączna liczba wszystkich ruchów.

Liczba 3

Udowodnimy, że liczba 3 nie może pojawić się w żadnym polu planszy.

Sposób I

Założmy, że liczba 3 występuje na planszy co najmniej raz. Spośród jej wszystkich wystąpień rozważmy pole P , które jest *najbardziej na lewo*, a jeśli jest więcej niż jedno takie, wybierzmy z nich to, które jest *najwyżej*. Pola bezpośrednio na lewo od P i bezpośrednio

powyżej P nie mogą zawierać liczby 3, więc pole P sąsiaduje z co najwyżej dwoma polami zawierającymi liczbę 3 — sprzeczność.

Sposób II

Zauważmy, że liczba 3 nie może występować w narożniku planszy, gdyż narożne pole ma tylko dwa pola sąsiadujące. W konsekwencji liczba 3 nie może znajdować się również na żadnym polu sąsiadującym z polem narożnym, gdyż takie pola mają tylko trzech sąsiadów, a o jednym z nich wiemy już, że nie zawiera liczby 3. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla pól znajdujących się na coraz dalszych przekątnych dochodzimy do wniosku, że liczba 3 nie może pojawić się w żadnym polu planszy.

Sposób III

Podzielmy pola planszy na *pierścienie* — pierwszy (zewnątrzny), składający się z pól brzegowych (tj. pól przylegających do obwodu planszy), drugi złożony z wszystkich pól sąsiadujących z polami pierwszego pierścienia ale do niego nie należących, trzeci złożony z pól sąsiadujących z polami drugiego pierścienia itd.

Zauważmy, że w pierwszym pierścieniu nie może pojawić się liczba 3, gdyż to wymusiłoby pojawienie się liczby 3 w kolejnych polach tego pierścienia i w konsekwencji — w jednym z jego narożników, co nie jest możliwe. Wiedząc, że pierwszy pierścień nie może zawierać liczb 3 można podobnie udowodnić, że liczba 3 nie może wystąpić w żadnym polu drugiego pierścienia — wówczas musiałaby znaleźć się w jego narożniku, a to nie jest możliwe, gdyż narożnik sąsiaduje tylko z dwoma polami, które mogą zawierać liczbę 3. Powtarzając analogiczne rozumowanie dla kolejnych pierścieni dochodzimy do wniosku, że liczba 3 nie może pojawić się w żadnym polu planszy.

Sposób IV

Załóżmy, że pewne pole P_1 planszy zawiera liczbę 3. Z warunków zadania wynika, że co najmniej jedno z dwóch pól: bezpośrednio na prawo od P_1 , bezpośrednio powyżej P_1 , zawiera liczbę 3 — oznaczmy takie pole przez P_2 . Podobnie oznaczmy przez P_3 takie pole sąsiadujące z P_2 i znajdujące się albo bezpośrednio na prawo od P_2 , albo bezpośrednio powyżej P_2 , które zawiera liczbę 3. W ten sposób można skonstruować dowolnie długi ciąg parami różnych pól zawierających liczbę 3 (pola się nie powtarzają, bo w konstruowanym ciągu każde kolejne pole jest na prawo lub wyżej od wszystkich poprzednich). Uzyskaliśmy sprzeczność, gdyż jest tylko skończona liczba pól na planszy.

Można również wykazać, że liczba wystąpień liczby 3 jest parzysta (co wystarcza do rozwiązania zadania) nie dowodząc przy tym, że jest równa 0.

Sposób V

Oznaczmy przez k liczbę pól zawierających liczbę 3. Obliczymy liczbę prostokątów 1×2 zawierających dwa pola z liczbą 3 (czyli łączną liczbę par sąsiadujących pól z liczbą 3). W myśl warunków zadania każde pole z liczbą 3 należy do trzech takich prostokątów, skąd uzyskujemy liczbę $3k$. W ten sposób każdy prostokąt został policzony dwukrotnie (gdyż zawiera dwa pola), co oznacza, że szukana liczba prostokątów jest równa $\frac{1}{2} \cdot 3k$. Skoro ta liczba jest całkowita, to liczba $3k$ i w konsekwencji — liczba k — jest parzysta.

Liczba 4

Gdyby liczba 4 pojawiła się w którymkolwiek polu P planszy, to liczba 4 musiałaby znajdować się kolejno w każdym polu sąsiadującym z P , każdym polu sąsiadującym z sąsiadami pola P itd. — ostatecznie każde pole planszy zawierałoby liczbę 4, co nie jest możliwe, gdyż pola przylegające do brzegu planszy mają co najwyżej trzech sąsiadów.