

XXI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część testowa

(25 września 2025 r.)

Rozwiązania zadań testowych

1. Kostka do gry jest sześcianem i na każdej ścianie ma inną liczbę oczek, od 1 do 6. Czarek rzucił trzema takimi kostkami i wypadło łącznie 16 oczek. Wynika z tego, że na pewnej kostce

- | | |
|---|---------------------|
| N | a) wypadły 4 oczka; |
| N | b) wypadło 5 oczek; |
| T | c) wypadło 6 oczek. |

Komentarz

- a) Jeśli liczby oczek są równe 5, 5, 6, to wypadło łącznie 16 oczek, ale na żadnej kostce nie wypadły 4 oczka.
- b) Jeśli liczby oczek są równe 4, 6, 6, to wypadło łącznie 16 oczek, ale na żadnej kostce nie wypadło 5 oczek.
- c) Gdyby na każdej kostce wypadło co najwyżej 5 oczek, to łączna liczba oczek byłaby nie większa od $5 + 5 + 5 = 15$.

2. Pewien kąt wewnętrzny trójkąta równoramiennego ma miarę 45° . Wynika z tego, że trójkąt ten

- | | |
|---|----------------------------|
| N | a) jest ostrokątny; |
| N | b) jest prostokątny; |
| T | c) nie jest rozwartokątny. |

Komentarz

- a) Trójkąt o kątach 90° , 45° , 45° spełnia warunki zadania, ale nie jest ostrokątny.
- b) Trójkąt o kątach 45° , $67,5^\circ$, $67,5^\circ$ spełnia warunki zadania, ale nie jest prostokątny.
- c) Jeżeli 45° jest kątem między podstawą a ramieniem w trójkącie równoramiennym, to pozostałe kąty mają miary 45° oraz $180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ$, więc trójkąt jest prostokątny.
- Jeżeli 45° jest kątem pomiędzy ramionami w trójkącie równoramiennym, to każdy z dwóch pozostałych kątów ma miarę $\frac{1}{2}(180^\circ - 45^\circ) = 67,5^\circ$, więc trójkąt jest ostrokątny.

3. Liczby a oraz b są dodatnie, przy czym liczba a jest całkowita, a liczba b nie jest całkowita. Wynika z tego, że

- | | |
|---|---|
| T | a) liczba $a+b$ nie jest całkowita; |
| N | b) liczba $a \cdot b$ nie jest całkowita; |
| N | c) liczba $a^2 + b^2$ nie jest całkowita. |

Komentarz

a) Gdyby liczba $a+b$ była całkowita, to również liczba $b = (a+b) - a$ byłaby całkowita, jako różnica liczba całkowitych.

b) Jeżeli $a = 2$ oraz $b = \frac{1}{2}$, to liczba $a \cdot b = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ jest całkowita.

c) Jeżeli $a = 1$ oraz $b = \sqrt{2}$, to liczba $a^2 + b^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 = 3$ jest całkowita.

4. Istnieje taki dodatni dzielnik liczby 2025, który jest

- | | |
|---|---------------------------------------|
| N | a) różnicą dwóch liczb nieparzystych; |
| T | b) iloczynem trzech liczb złożonych; |
| T | c) sumą czterech liczb pierwszych. |

Komentarz

a) Różnica dwóch liczb nieparzystych jest liczbą parzystą. Liczba 2025 jest nieparzysta, więc nie ma ona parzystych dzielników.

b) Zauważmy, że $2025 = 9 \cdot 9 \cdot 25$ i każdy z tych trzech czynników jest liczbą złożoną.

c) Zauważmy, że liczba $15 = 2 + 3 + 5 + 5$ jest sumą czterech liczb pierwszych oraz dzielnikiem liczby $2025 = 15 \cdot 135$.

5. W trójkącie ABC bok AB ma długość 1. Wysokość opuszczona z wierzchołka C na prostą AB również ma długość 1. Wynika z tego, że

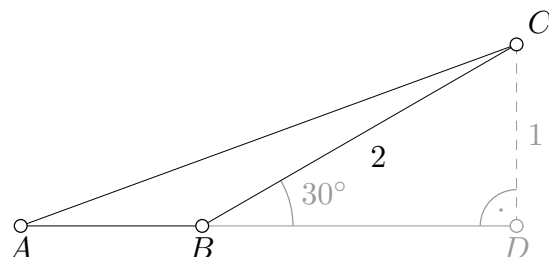
- | | |
|---|---|
| N | a) pole trójkąta ABC jest równe 1; |
| T | b) obwód trójkąta ABC jest większy od 3; |
| N | c) obwód trójkąta ABC jest mniejszy od 4. |

Komentarz

a) Pole tego trójkąta jest równe $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$.

b) Odcinek AC łączy punkt C z pewnym punktem prostej AB , więc jego długość jest nie mniejsza od odległości punktu C od prostej AB , czyli liczby 1. Podobnie uzasadniamy, że odcinek BC ma długość nie mniejszą od 1. Zatem obwód trójkąta ABC jest nie mniejszy od 3. Ponieważ jednak odcinki BC , AC nie mogą być jednocześnie wysokościami trójkąta ABC , więc obwód tego trójkąta jest liczbą większą od 3.

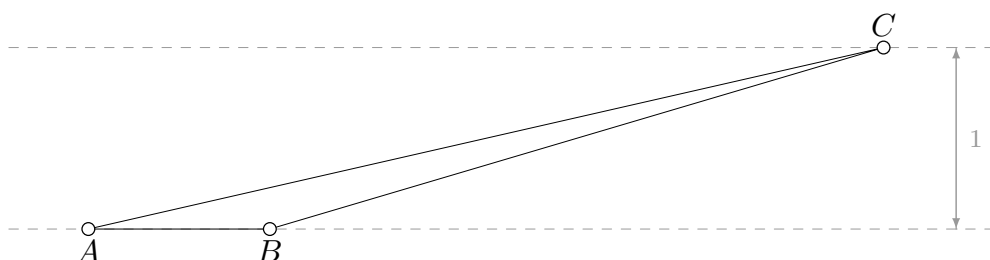
c) Oznaczmy przez D taki punkt prostej AB , że CD jest wysokością trójkąta ABC . Jeżeli $\angle ABC = 150^\circ$, to BCD jest trójkątem prostokątnym o kątach 30° , 60° , 90° , czyli połową trójkąta równobocznego (rys. 1). W konsekwencji $BC = 2 \cdot CD = 2$. Odcinek AC jest najdłuższym bokiem trójkąta ABC , gdyż leży naprzeciw największego kąta wewnętrznego. Wobec tego $AC > BC = 2$. W konsekwencji obwód trójkąta ABC jest liczbą większą od 4.



rys. 1

Uwaga

O tym, że obwód trójkąta ABC może być dowolnie dużą liczbą, można przekonać się nie wykonując obliczeń — wystarczy rozważyć trójkąt, w którym jeden z kątów przy boku AB jest rozwarty i ma miarę nieznacznie mniejszą od 180° (rys. 2).



rys. 2

6. Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 1. Przekątne tego kwadratu przecinają się w punkcie O . Pewien okrąg o środku w punkcie O dzieli bok AB na trzy równe części. Promień tego okręgu

- | | |
|---|-------------------------------------|
| N | a) jest mniejszy od $\frac{1}{2}$; |
| N | b) jest równy $\frac{1}{2}$; |
| T | c) jest większy od $\frac{1}{2}$. |

Komentarz

Odległość punktu O od każdego z boków kwadratu jest równa $\frac{1}{2}$. Okrąg o promieniu $\frac{1}{2}$ jest styczny do boków kwadratu, a okrąg o promieniu mniejszym od $\frac{1}{2}$ — w ogóle ich nie przecina.

Uwaga

Wykorzystując twierdzenie Pitagorasa można obliczyć, że promień okręgu jest równy

$$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{6}.$$

Ponieważ $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$, więc promień jest większy od $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

7. W akwarium Marka każda rybka jest jednego z trzech kolorów: złotego, czerwonego lub niebieskiego. Rybek czerwonych jest o 50% więcej niż złotych, a rybek niebieskich jest o 40% mniej niż czerwonych. Wynika z tego, że w akwarium Marka

- | | |
|---|---|
| N | a) rybek złotych jest mniej niż niebieskich; |
| T | b) liczba niebieskich rybek jest podzielna przez 9; |
| T | c) liczba złotych rybek jest podzielna przez 10. |

Komentarz

Oznaczmy przez z liczbę złotych rybek w akwarium Marka. Wówczas liczba rybek czerwonych jest równa $150\% \cdot z = \frac{3}{2}z$, a liczba rybek niebieskich jest równa $60\% \cdot \frac{3}{2}z = \frac{9}{10}z$.

- a) Zauważmy, że $\frac{9}{10}z \leq z$, gdyż $z \geq 0$.
c) Skoro liczba $\frac{9}{10}z$ jest całkowita i $\text{NWD}(9, 10) = 1$, to z jest liczbą podzielną przez 10.
b) Liczba niebieskich rybek jest równa $9 \cdot \frac{z}{10}$. Z rozwiązania punktu c) wynika, że czynnik $\frac{z}{10}$ jest liczbą całkowitą.

8. Istnieje całkowita wielokrotność liczby 21, w której zapisie dziesiętnym

- | | |
|---|--|
| T | a) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 0; |
| T | b) cyfra dziesiątek jest równa 0, a cyfra jedności jest równa 1; |
| T | c) cyfra dziesiątek jest równa 1, a cyfra jedności jest równa 1. |

Komentarz

- a) Zauważmy, że $21 \cdot 10 = 210$.
b) Zauważmy, że $21 \cdot 81 = 21 + 21 \cdot 80 = 21 + 1680 = 1701$.
c) Wystarczy dodać liczby znalezione w poprzednich punktach: $210 + 1701 = 1911$.

Uwaga

Przykład opisany w punkcie b) można znaleźć w następujący sposób: aby uzyskać wielokrotność liczby 21 zakończoną na „01”, wystarczy dodać 21 do wielokrotności liczby 21 zakończonej na „80”. Tę zaś można uzyskać z wielokrotności liczby 21 zakończonej na „10” (punkt a) w wyniku pomnożenia przez 8.

Można udowodnić, że każda ze stu możliwych *dwucyfrowych końcówek* pojawia się dokładnie raz pośród liczb $1 \cdot 21, 2 \cdot 21, 3 \cdot 21, \dots, 100 \cdot 21$.

9. Istnieje trójkąt prostokątny o bokach długości a , b , c , w którym

- | | |
|---|--------------------------------|
| T | a) $a^2 + b^2 = c^2$; |
| T | b) $a^2 - b^2 = c^2$; |
| T | c) $2 \cdot a \cdot b = c^2$. |

Komentarz

a) Jeżeli c jest długością przeciwprostokątnej, to równość $a^2 + b^2 = c^2$ wynika z twierdzenia Pitagorasa,

b) Jeżeli a jest długością przeciwprostokątnej, to równość $b^2 + c^2 = a^2$ wynika z twierdzenia Pitagorasa. Stąd $c^2 = a^2 - b^2$.

c) Rozważmy trójkąt będący połową kwadratu o boku 1 i oznaczmy długości jego boków w taki sposób, że $a = b = 1$ oraz $c = \sqrt{2}$. Wówczas $c^2 = 2 = 2 \cdot a \cdot b$.

Uwaga

Boki każdego trójkąta prostokątnego można oznaczyć tak, aby spełnione były równości z punktów a) lub b). Równość z punktu c) oprócz trójkątów równoramiennych ($a = b$ oraz $c = a\sqrt{2}$) spełniają również trójkąty, w których jedna z przyprostokątnych ma długość c , a stosunek długości przeciwprostokątnej do drugiej przyprostokątnej jest równy $\sqrt{2} + 1$.

10. Liczby naturalne od 1 do 6 napisano na ścianach sześcianu, każdą na innej ścianie.

Następnie dla każdej krawędzi sześcianu obliczono sumę liczb napisanych na dwóch ścianach, których wspólnym bokiem jest ta krawędź. Wynika z tego, że pewna spośród 12 obliczonych sum jest

- | | |
|---|---------------------------------|
| T | a) liczbą dwucyfrową; |
| T | b) kwadratem liczby całkowitej; |
| N | c) równa 7. |

Komentarz

a) Rozważmy ścianę, na której napisano 6. Co najmniej jedna z liczb 4, 5 jest na ścianie mającej z nią wspólny bok (gdyż co najwyżej jedna z nich może być na ścianie przeciwległej). Zatem wśród obliczonych sum jest co najmniej jedna z liczb $6 + 4 = 10$, $6 + 5 = 11$.

b) Podobnie jak w poprzednim punkcie uzasadniamy, że ściana z liczbą 3 ma wspólny bok ze ścianą z liczbą 1 lub ze ścianą z liczbą 6. Zatem wśród obliczonych sum jest co najmniej jedna z liczb $3 + 1 = 4 = 2^2$, $3 + 6 = 9 = 3^2$.

c) Liczbę 7 można zapisać w postaci sumy dwóch całkowitych składników z zakresu od 1 do 6 tylko na trzy sposoby: $1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$. Jeżeli liczby 1, 6 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu, liczby 2, 5 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu i liczby 3, 4 napisano na przeciwległych ścianach sześcianu, to pośród obliczonych sum nie ma liczby 7.

11. Liczby a, b są dodatnie i mniejsze od 1. Wynika z tego, że

- ☐ T a) $a \cdot b < a + b$;
☐ T b) $a \cdot b < a^2 + b^2$;
☐ N c) $a \cdot b < a^3 + b^3$.

Komentarz

- a) Skoro $0 < b < 1$, to $a \cdot b < a \cdot 1 = a < a + b$.
b) Jeżeli $a \leq b$, to $a \cdot b \leq b \cdot b < a^2 + b^2$. Podobnie jeżeli $a > b$, to $a \cdot b < a^2 < a^2 + b^2$.
c) Jeżeli $a = b = \frac{1}{2}$, to $a \cdot b = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = a^3 + b^3$.

12. Istnieją dwie różne potęgi liczby 3 o wykładnikach całkowitych dodatnich, których suma jest

- ☐ N a) potęgą liczby 2 o wykładniku całkowitym dodatnim;
☐ N b) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym dodatnim;
☐ T c) potęgą liczby 6 o wykładniku całkowitym dodatnim.

Komentarz

a) Suma dwóch potęg liczby 3 o wykładnikach całkowitych dodatnich jest liczbą podzielną przez 3. Z kolei każda potęga liczby 2 o wykładniku całkowitym dodatnim jest liczbą niepodzielną przez 3.

b) Każda potęga liczby 3 o wykładniku całkowitym dodatnim jest liczbą nieparzystą. Suma dwóch liczb nieparzystych zawsze jest liczbą parzystą.

c) Zauważmy, że $3^2 + 3^3 = 9 + 27 = 36 = 6^2$.

Uwaga

Można uzasadnić, że przykład przywołany w rozwiązaniu punktu c) jest jedyny.

13. Dany jest trójkąt ABC , w którym $BC = 2 \cdot AC$. Punkt D leży wewnątrz tego trójkąta i spełnia równość $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. Wynika z tego, że

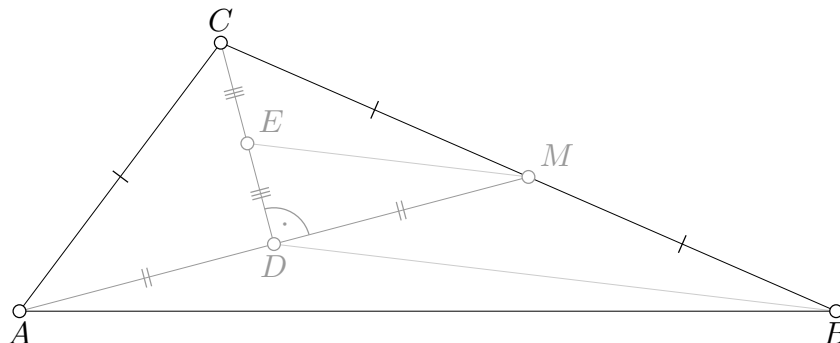
- ☐ N a) $BD = 2 \cdot AD$;
☐ T b) pole trójkąta BDC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC ;
☐ N c) $\sphericalangle BAC = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

Komentarz

b) Skoro punkt D leży na dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku C , to ma taką samą odległość od prostych AC oraz BC — oznaczmy tę odległość przez h . Wówczas pole trójkąta BDC jest równe $\frac{1}{2}BC \cdot h$, a pole trójkąta ADC jest równe $\frac{1}{2}AC \cdot h$. Założenie $BC = 2 \cdot AC$ prowadzi więc do wniosku, że pole trójkąta BDC jest dwa razy większe od pola trójkąta ADC .

c) Rozważmy trójkąt ABC , w którym $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = 30^\circ$ oraz $\sphericalangle BCA = 60^\circ$. Wówczas $BC = 2 \cdot AC$ (trójkąt ABC jest połową trójkąta równobocznego), więc założenie zadania jest spełnione. Jednak $\sphericalangle BAC = 90^\circ \neq 60^\circ = 2 \cdot \sphericalangle ABC$.

a) Rozważmy dowolny trójkąt ABC , w którym $BC = 2 \cdot AC$. Oznaczmy przez M środek odcinka BC , przez D środek odcinka AM oraz przez E środek odcinka CD (rys. 3).



rys. 3

Zauważmy, że $MC = \frac{1}{2}BC = AC$, więc trójkąt ACM jest równoramienny. Środek D podstawy AM tego trójkąta leży na jego osi symetrii, więc $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$.

Odcinek ME jest linią środkową w trójkącie BCD , więc $ME = \frac{1}{2}BD$. W trójkącie prostokątnym DEM przeciwprostokątna ME jest dłuższa od przyprostokątnej MD , czyli

$$\frac{1}{2}BD = ME > MD = AD, \quad \text{skąd} \quad BD > 2 \cdot AD.$$

Uwaga

Można udowodnić, że nierówność $BD > 2 \cdot AD$ zachodzi dla każdego punktu D wewnątrz trójkąta ABC spełniającego $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$ (nie tylko dla środka odcinka AM).

14. Dodatnia liczba całkowita n ma następującą własność: liczba n -cyfrowa, której zapis dziesiętny składa się wyłącznie z cyfr równych 1, jest podzielna przez n . Wynika z tego, że liczba n jest

- | | |
|---|--|
| T | a) nieparzysta; |
| N | b) podzielna przez 3; |
| N | c) potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym nieujemnym. |

Komentarz

- a) Każda liczba, której zapis składa się wyłącznie z cyfr równych 1 jest nieparzysta, a liczba nieparzysta nie ma parzystych dzielników.
- b) Jeżeli $n = 1$, to warunki zadania są spełnione, a 1 nie jest liczbą podzielną przez 3.

c) Jeżeli $n = 111$, to warunki zadania są spełnione, gdyż

$$\underbrace{1111 \dots 11}_{111} = 111 \cdot \underbrace{1001001001 \dots 001}_{36 \text{ segmentów „001”}},$$

a 111 nie jest potęgą liczby 3 o wykładniku całkowitym nieujemnym.

Uwaga

W punkcie b) przykład $n = 1$ jest jedyny. Można udowodnić, że jeżeli liczba n spełnia warunki zadania i $n \geq 2$, to n jest liczbą podzielną przez 3.

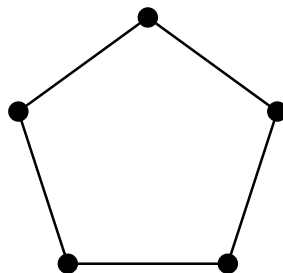
15. W grupie 5 osób każda osoba ma pośród pozostałych osób w tej grupie co najmniej jednego znajomego i co najmniej jednego nieznanego (przyjmujemy, że jeżeli A jest znajomym B , to również B jest znajomym A). Wynika z tego, że w tej grupie

- | |
|---|
| T |
| N |
| N |
- a) pewna osoba ma co najmniej dwóch znajomych;
b) pewna osoba ma dokładnie trzech znajomych;
c) pewne dwie osoby, które nie są znajomymi, mają wspólnego znajomego.

Komentarz

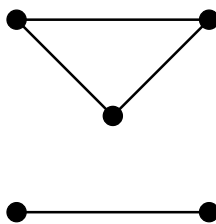
a) Gdyby każda osoba miała dokładnie jednego znajomego, to wszystkie osoby w tej grupie można byłoby połączyć w pary z ich znajomymi, więc liczba osób byłaby parzysta.

b) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 4 (kropki odpowiadają osobom, a odcinki między nimi — znajomościom), to warunki zadania są spełnione: każda osoba ma co najmniej jednego znajomego i co najmniej jednego nieznanego. Mimo to żadna osoba nie ma dokładnie trzech znajomych.



rys. 4

c) Jeśli układ znajomości wygląda tak, jak zilustrowano na rysunku 5, to żadna para nieznanymi nie ma wspólnego znajomego.



rys. 5