XXII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody pierwszego stopnia — część zadaniowa (7 października 2026 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

---

1. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n o tej własności, że liczba $6n+1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze.

Rozwiązanie

Załóżmy, że liczba n spełnia warunki zadania i oznaczmy przez p, q, r trzy najmniejsze dzielniki pierwsze liczby $6n+1$ w taki sposób, że $p<q<r$. Liczba $6n+1$ nie jest podzielna przez 2 ani przez 3, więc $p\geqslant 5$, $q\geqslant 7$ oraz $r\geqslant 11$ i w konsekwencji

$$pqr\geqslant 5\cdot 7\cdot 11=385.$$

Ponadto skoro każde dwie z liczb p, q, r są różne i występują w rozkładzie liczby $6n+1$ na czynniki pierwsze, to $6n+1$ jest wielokrotnością liczby pqr. Ponieważ $6n+1$ jest liczbą dodatnią, więc wynika z tego, że $6n+1\geqslant pqr$. W połączeniu z uzyskaną wcześniej nierównością $pqr\geqslant 385$, otrzymujemy więc

$$6n+1\geqslant 385,\quad \text{czyli}\quad n\geqslant \frac{385-1}{6}=64.$$

Pozostaje zauważyć, że liczba $n=64$ rzeczywiście spełnia warunki zadania, gdyż $6n+1=5\cdot 7\cdot 11$ jest iloczynem trzech parami różnych liczb pierwszych.

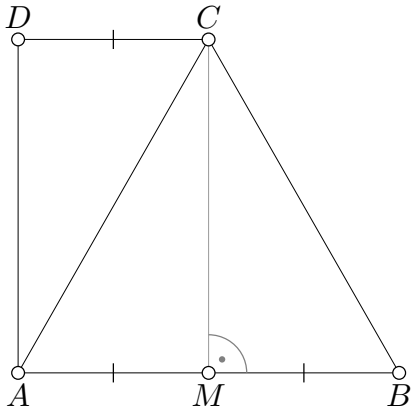
---

2. W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD zachodzi równość $AB=2\cdot CD$. Wykaż, że $AC=BC$.

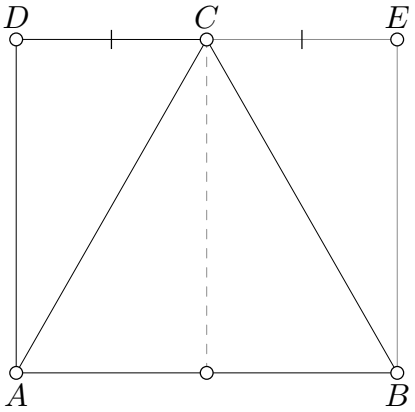
Rozwiązanie

Sposób I

Oznaczmy przez M środek odcinka AB (rys. 1). Ponieważ $AM=\frac{1}{2}\cdot AB=CD$, więc trapez prostokątny $AMCD$ ma podstawy równej długości, czyli jest prostokątem. To oznacza, że trójkąty AMC oraz BMC są prostokątne, a zatem są to trójkąty przystające, gdyż mają te same długości przyprostokątnych $AM=BM$ oraz CM. W konsekwencji przeciwprostokątne tych trójkątów są równej długości, czyli $AC=BC$.



rys. 1



rys. 2

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

Sposób II

Oznaczmy przez E taki punkt, że czworokąt $ABED$ jest prostokątem (rys. 2). Wówczas punkt E leży na prostej CD, a z założenia $AB=2\cdot CD$ wynika, że punkt C jest środkiem odcinka DE. Wobec tego odcinki AC oraz BC są symetryczne względem osi symetrii prostokąta $ABED$ przechodzącej przez środki boków AB oraz DE, a zatem są równej długości.

---

3. Czy istnieją takie dodatnie liczby rzeczywiste x, y, że

$$x+y=xy \quad \text{oraz} \quad x-y=\frac{x}{y}?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Uzasadnimy, że liczby spełniające warunki zadania nie istnieją. Załóżmy nie wprost, że takie liczby istnieją. W każdym z przedstawionych sposobów rozwiązania doprowadzimy to założenie do sprzeczności.

Sposób I

Mnożąc stronami dane równości, uzyskujemy

$$(x+y)(x-y)=xy\cdot\frac{x}{y}, \quad \text{czyli} \quad x^2-y^2=x^2.$$

Stąd $y^2=0$, czyli $y=0$, co jest sprzeczne z założeniem, że liczba y jest dodatnia.

Sposób II

Dzieląc równość $x+y=xy$ przez liczbę dodatnią y, uzyskujemy $\frac{x}{y}+1=x$, czyli $x-1=\frac{x}{y}$. W połączeniu z równością $x-y=\frac{x}{y}$, uzyskujemy więc $y=1$. Jednak wówczas równość $xy=x+y$ przybiera sprzeczną postać $x=x+1$.

Sposób III

Dodając stronami dane równości, uzyskujemy

$$(x+y)+(x-y)=xy+\frac{x}{y}, \quad \text{czyli} \quad 2x=x\left(y+\frac{1}{y}\right).$$

Ponieważ $x>0$, więc otrzymaną równość można podzielić stronami przez x, otrzymując

$$2=y+\frac{1}{y}.$$

Przekształcając tę równość równoważnie, otrzymujemy kolejno

$$2y=y^2+1, \qquad 0=y^2-2y+1, \qquad 0=(y-1)^2,$$

skąd $y=1$. Jednak wówczas pierwsza z danych w treści zadania równości przybiera postać $x+1=x$ — sprzeczność.

Uwaga

Istnieje nieskończenie wiele par liczb dodatnich (x,y) spełniających warunek $x+y=xy$: dla dowolnej liczby $x>1$ wystarczy przyjąć $y=\frac{x}{x-1}$.

Podobnie istnieje nieskończenie wiele par liczb dodatnich (x,y) spełniających warunek $x-y=\frac{x}{y}$: dla dowolnej liczby $y>1$ wystarczy przyjąć $x=\frac{y^2}{y-1}$.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

4. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q, dla których $p>q$ i liczby $p-q$ oraz $p+q$ również są pierwsze.

Rozwiązanie

Gdyby obydwie liczby p oraz q były nieparzyste, to liczba $p+q$ byłaby liczbą parzystą większą od 2, a więc liczbą złożoną. Wynika z tego, że jedna z liczb p, q jest równa 2, a skoro $p>q$, to $q=2$.

Pozostaje rozstrzygnąć, dla jakich liczb pierwszych p liczby $p-2$ oraz $p+2$ również są pierwsze. Rozważymy możliwe reszty z dzielenia liczby p przez 3.

Jeżeli p jest liczbą podzielną przez 3, to $p=3$. Jednak wówczas $p-2=1$ nie jest liczbą pierwszą. W tym przypadku nie ma więc rozwiązań.

Jeżeli p daje resztę 1 przy dzieleniu przez 3, to liczba $p+2$ jest podzielna przez 3 i większa od 3 — jest więc złożona. W tym przypadku również nie ma rozwiązań.

Jeżeli p daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3, to liczba $p-2$ jest podzielna przez 3. Jeśli ta liczba jest pierwsza, to $p-2=3$, skąd $p=5$ i $p+2=7$. Ponieważ są to liczby pierwsze, więc otrzymana para $p=5$ oraz $q=2$ jest jedynym rozwiązaniem zadania.

---

5. W pewnej krainie żyją smoki, a każdy z nich ma dokładnie 1 lub 4 głowy oraz dokładnie 2 lub 5 nóg. Czy możliwe jest, że wszystkie smoki żyjące w tej krainie mają łącznie dokładnie 210 głów i dokładnie 211 nóg? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Sposób I

Zauważmy, że u każdego smoka łączna liczba głów oraz nóg jest podzielna przez 3, gdyż jest to jedna z liczb

$$2+1=3, \quad 5+1=6, \quad 2+4=6, \quad 5+4=9.$$

Wobec tego również łączna liczba głów i nóg wszystkich smoków musi być podzielna przez 3. Jednak w sytuacji opisanej w zadaniu suma ta wynosiłaby $211+210=421$, a ta liczba nie jest podzielna przez 3. Otrzymana sprzeczność oznacza, że sytuacja opisana w treści zadania nie może mieć miejsca.

Sposób II

Przypuśćmy, że sytuacja opisana w treści zadania jest możliwa. Niech s oznacza liczbę wszystkich smoków w tej krainie.

Odetnijmy każdemu smokowi jedną głowę i dwie nogi. Wówczas każdy smok pozostanie z podzielną przez 3 liczbą głów i podzielną przez 3 liczbą nóg, więc łączna liczba pozostałych smokom nóg i łączna liczba pozostałych smokom głów są podzielne przez 3.

Łączna liczba pozostałych głów wszystkich smoków jest równa $210-s$, więc skoro 210 jest liczbą podzielną przez 3, to również s jest liczbą podzielną przez 3. Z kolei łączna liczba pozostałych nóg wszystkich smoków jest równa $211-2s$. Jeżeli s jest liczbą podzielną przez 3, to $211-2s$ nie jest liczbą podzielną przez 3, jako różnica liczby niepodzielnej przez 3 oraz liczby podzielnej przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność z konkluzją poprzedniego akapitu.

Sposób III

Podobnie jak w poprzednim sposobie, przypuśćmy, że opisana sytuacja jest możliwa i oznaczmy przez s liczbę wszystkich smoków. Oznaczmy ponadto przez g liczbę smoków mających dokładnie jedną głowę, a przez n — liczbę smoków mających dokładnie 2 nogi. Wówczas $s-g$ to liczba smoków mających dokładnie 4 głowy, a $s-n$ — liczba smoków mających dokładnie 5 nóg. Z warunków zadania wynikają więc równości

$$1\cdot g+(s-g)\cdot 4=210 \qquad \text{oraz} \qquad 2\cdot n+5\cdot(s-n)=211,$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

skąd uzyskujemy

$$4s-3g=210 \qquad \text{oraz} \qquad 5s-3n=211.$$

Z pierwszej równości wynika, że $4s=3g+210$ jest liczbą podzielną przez 3 jako suma dwóch liczb podzielnych przez 3. W konsekwencji również liczba s jest podzielna przez 3.

Z kolei z drugiej równości wynika, że $5s=3n+210+1$ jest liczbą dającą resztę 1 przy dzieleniu przez 3, a zatem niepodzielną przez 3. W konsekwencji również liczba s jest niepodzielna przez 3. Otrzymana sprzeczność oznacza, że opisana sytuacja nie może mieć miejsca.

---

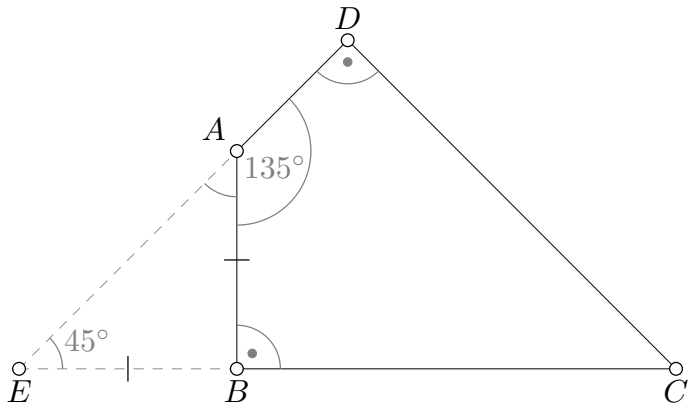
6. W czworokącie $ABCD$ zachodzą równości $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ADC=90^\circ$ oraz $\sphericalangle BAD=135^\circ$. Wykaż, że $AB+BC=\sqrt{2}\cdot CD$.

Rozwiązanie

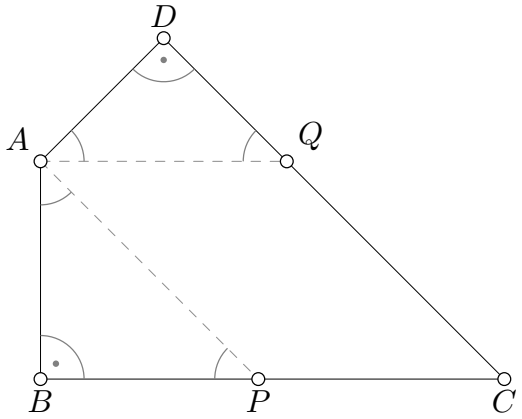
Sposób I

Oznaczmy przez E punkt przecięcia prostych AD oraz BC (rys. 3). Skoro $\sphericalangle BAD=135^\circ$, to $\sphericalangle BAE=45^\circ$ i w konsekwencji $\sphericalangle AEB=90^\circ-\sphericalangle BAE=45^\circ$ oraz $\sphericalangle BCD=90^\circ-\sphericalangle CED=45^\circ$. To oznacza, że trójkąty prostokątne ABE oraz CDE są równoramienne, czyli są połówkami kwadratów. Wobec tego

$$AB+BC=BE+BC=CE=CD\cdot\sqrt{2}.$$



rys. 3



rys. 4

Sposób II

Oznaczmy przez P oraz Q takie punkty leżące odpowiednio na odcinkach BC oraz CD, że czworokąt $APCQ$ jest równoległobokiem (rys. 4). Trójkąty prostokątne ABP oraz ADQ są równoramienne, gdyż każdy z nich ma kąt ostry miary 45°. Wobec tego

$$AQ=QD\cdot\sqrt{2} \quad \text{oraz} \qquad AB=BP=\frac{AP}{\sqrt{2}}.$$

W konsekwencji ponieważ $PC=AQ$ oraz $AP=CQ$, uzyskujemy

$$AB+BC=AB+BP+PC=2\cdot\frac{AP}{\sqrt{2}}+AQ=CQ\cdot\sqrt{2}+QD\cdot\sqrt{2}=CD\cdot\sqrt{2}.$$

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej

7. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$a+\frac{1}{a}=b-\frac{1}{b}.$$

Wykaż, że $b^2-a^2>4$.

Rozwiązanie

Sposób I

Przekształcając równoważnie dany warunek, uzyskujemy

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=b-a.$$

Wynika z tego, że $b-a>0$ (czyli w szczególności $b-a\neq 0$) oraz

$$b^2-a^2=(b-a)(b+a)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{(a+b)^2}{ab}.$$

Wystarczy więc udowodnić, że zachodzi nierówność

$$\frac{(a+b)^2}{ab}>4.$$

Ponieważ ab jest liczbą dodatnią, więc nierówność ta jest równoważna nierówności $(a-b)^2>0$, która jest spełniona, gdyż $a\neq b$. To kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w poprzednim sposobie zauważamy, że $b>a$, skąd $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}>0$. Podnosząc daną równość stronami do kwadratu, uzyskujemy

$$a^2+2+\frac{1}{a^2}=b^2-2+\frac{1}{b^2},$$

skąd

$$b^2-a^2=4+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}>4.$$

Uwaga

Daną równość spełnia np. para liczb $a=1$, $b=1+\sqrt{2}$. Można uzasadnić, że jeżeli liczby a, b spełniają daną równość, to co najmniej jedna z tych liczb jest niewymierna.

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest finansowana ze środków Ministerstwa Edukacji Narodowej

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Ministerstwo Edukacji Narodowej