

XXII Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody stopnia pierwszego — część zadaniowa

(7 października 2026 r., godz. 9:00)

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań wpisz na każdą z siedmiu kartek swoje imiona, nazwisko, numer klasy oraz numer zadania.

Rozwiązania poszczególnych zadań zapisuj **na oddzielnych kartkach**. Używaj koloru czarnego lub niebieskiego. Nie używaj ołówka ani korektora.

Zadania są jednakowo punktowane. Za w pełni poprawne rozwiązanie zadania można uzyskać **3 punkty**, a za istotny postęp w kierunku poprawnego rozwiązania można uzyskać **1 punkt**.

Pamiętaj, że ocenie podlega przedstawiony **tok rozumowania**, więc staraj się zaprezentować go dokładnie i precyzyjnie. Za podanie samej odpowiedzi, nawet poprawnej, bez uzasadnienia (lub z błędnym uzasadnieniem) nie będą przyznawane punkty.

Czas na rozwiązywanie zadań: 100 minut.

Powodzenia!

1. Wyznacz najmniejszą liczbę naturalną n o tej własności, że liczba $6n + 1$ ma co najmniej trzy różne dzielniki pierwsze.

2. W trapezie prostokątnym $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD zachodzi równość $AB = 2 \cdot CD$. Wykaż, że $AC = BC$.

3. Czy istnieją takie dodatnie liczby rzeczywiste x, y , że

$$x + y = xy \quad \text{oraz} \quad x - y = \frac{x}{y}?$$

Odpowiedź uzasadnij.

4. Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych p, q , dla których $p > q$ i liczby $p - q$ oraz $p + q$ również są pierwsze.

5. W pewnej krainie żyją smoki, a każdy z nich ma dokładnie 1 lub 4 głowy oraz dokładnie 2 lub 5 nóg. Czy możliwe jest, że wszystkie smoki żyjące w tej krainie mają łącznie dokładnie 210 głów i dokładnie 211 nóg? Odpowiedź uzasadnij.

6. W czworokącie $ABCD$ zachodzą równości $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle BAD = 135^\circ$. Wykaż, że $AB + BC = \sqrt{2} \cdot CD$.

7. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b spełniają warunek

$$a + \frac{1}{a} = b - \frac{1}{b}.$$

Wykaż, że $b^2 - a^2 > 4$.