Matematyczna Olimpiada Juniorów
www.omj.edu.pl

XVI Olimpiada Matematyczna Juniorów

Zawody drugiego stopnia (23 stycznia 2021 r.)

Rozwiązania zadań konkursowych

1. Liczby a, b spełniają warunek $2a+a^2=2b+b^2$. Wykaż, że jeżeli liczba a jest całkowita, to liczba b także jest całkowita.

Rozwiązanie
Sposób I
Dodając 1 do obu stron równości $2a+a^2=2b+b^2$, uzyskujemy $1+2a+a^2=1+2b+b^2$. Stąd, po wykorzystaniu wzoru $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, dostajemy $(1+a)^2=(1+b)^2$. Wobec tego $1+a=1+b$ lub $1+a=-(1+b)$, czyli $b=a$ lub $b=-2-a$. W obu przypadkach b jest więc liczbą całkowitą.

Sposób II
Tym razem w rachunkach użyjemy wzoru $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$. Przekształcając bowiem równoważnie zależność $2a+a^2=2b+b^2$, uzyskujemy kolejno

$$2a-2b+a^2-b^2=0,$$
$$2(a-b)+(a+b)(a-b)=0,$$
$$(2+a+b)(a-b)=0.$$

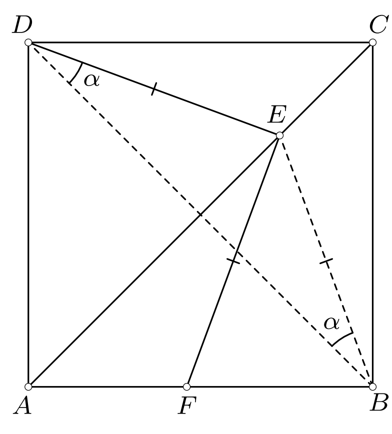
Stąd wniosek, że $2+a+b=0$ lub $a-b=0$, czyli $b=-2-a$ lub $b=a$. W obu przypadkach b jest liczbą całkowitą.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt E leży na przekątnej AC, przy czym $AE>EC$. Na boku AB wybrano punkt F, różny od B, dla którego $EF=DE$. Udowodnij, że $\sphericalangle DEF=90°$.

Rozwiązanie
Sposób I
Ponieważ $BC=DC$ oraz $\sphericalangle BCE=45°=\sphericalangle DCE$, więc trójkąty BCE oraz DCE są przystające (cecha bok–kąt–bok). Stąd $BE=DE$ (rys. 1).
Oznaczmy zatem $\alpha=\sphericalangle EBD=\sphericalangle EDB$. Wtedy $\sphericalangle BED=180°-2\alpha$.
Ponadto $BE=DE=EF$, więc $\sphericalangle EFB=\sphericalangle EBF=45°+\alpha$. W związku z tym

$$\sphericalangle FEB=180°-2(45°+\alpha)=90°-2\alpha.$$

Wobec tego $\sphericalangle DEF=\sphericalangle DEB-\sphericalangle FEB=(180°-2\alpha)-(90°-2\alpha)=90°$, co kończy dowód.



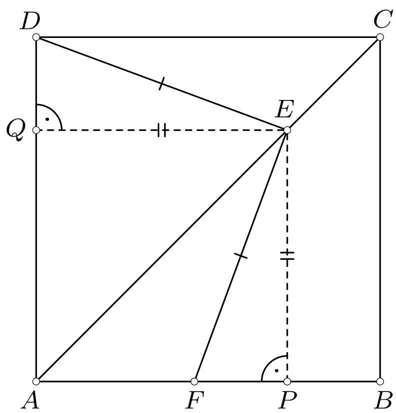
rys. 1

Sposób II

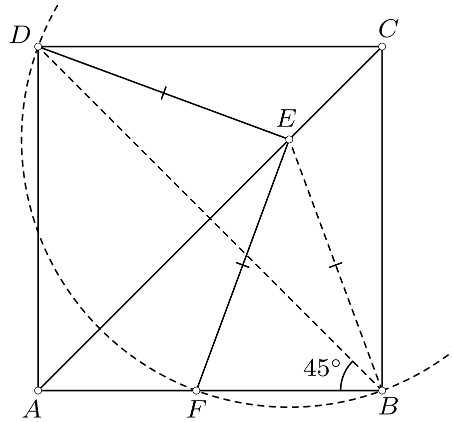
Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktu E odpowiednio na boki AB i AD (rys. 2). Ponieważ punkt E leży na dwusiecznej kąta BAD, więc $EP=EQ$. Ponadto $EF=DE$. W związku z tym, wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$PF=\sqrt{EF^2-EP^2}=\sqrt{DE^2-EQ^2}=QD\,.$$

Z zależności tych wynika, że trójkąty EPF i EQD są przystające (cecha bok–bok–bok). Wobec tego $\sphericalangle FEP=\sphericalangle DEQ$. Stąd, po dodaniu do obu stron miary kąta QEF, otrzymujemy $\sphericalangle DEF=\sphericalangle QEP$. Ale $\sphericalangle QEP=90^\circ$, więc również $\sphericalangle DEF=90^\circ$. To kończy dowód.



rys. 2



rys. 3

Sposób III

Podobnie jak w sposobie I uzasadniamy najpierw, że $BE=DE$ (rys. 3). Rozpatrzmy następnie okrąg o środku E i promieniu BE. Ponieważ $BE=DE=FE$, więc okrąg ten przechodzi przez punkty B, D i F. W związku z tym kąt DEF jest kątem środkowym opartym na łuku DF. Ma więc on dwa razy większą miarę od każdego kąta wpisanego opartego na tym łuku, w szczególności kąta DBF. Zatem $\sphericalangle DEF=2\sphericalangle DBF=2\cdot 45^\circ=90^\circ$.

---

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, dla których liczba $5a+3b$ jest podzielna przez liczbę $a+b$. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Sposób I

Z warunków zadania wynika, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, dla której $5a+3b=k(a+b)$. Przekształcając tę zależność, uzyskujemy kolejno

$$5a-ka=kb-3b\,,$$
$$(5-k)a=(k-3)b\,.$$

Liczby a, b są dodatnie. Zatem jeśli $k\geqslant 5$, to lewa strona ostatniej równości jest ujemna lub równa 0, podczas gdy jej prawa strona jest dodatnia. Podobnie, jeśli $k\leqslant 3$, to lewa tej samej równości jest dodatnia, podczas gdy jej prawa strona jest ujemna lub równa 0. Wobec tego k musi być równe 4. Podstawiając zatem $k=4$ do uzyskanej wyżej równości, dostajemy $a=b$, co kończy dowód.

Sposób II

Podobnie jak w sposobie I rozpoczynamy od obserwacji, że istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, dla której $5a+3b=k(a+b)$. Wobec tego

$$k=\frac{5a+3b}{a+b}=\frac{4(a+b)+a-b}{a+b}=4+\frac{a-b}{a+b}\,.$$

Liczby k i 4 są całkowite, więc z powyższej równości wynika, że liczba $a-b$, a więc także i liczba $b-a$, jest podzielna przez $a+b$.

Jeśli $a>b$, to liczba $a-b$ jest dodatnia i mniejsza od $a+b$, a wtedy $a+b$ nie może być dzielnikiem liczby $a-b$. Podobnie, jeśli $a<b$, to liczba $b-a$ jest dodatnia i mniejsza od $a+b$, a wtedy $a+b$ nie może być dzielnikiem liczby $b-a$.

W obu przypadkach uzyskujemy sprzeczność, z której wynika, że $a=b$. To kończy rozwiązanie zadania.

---

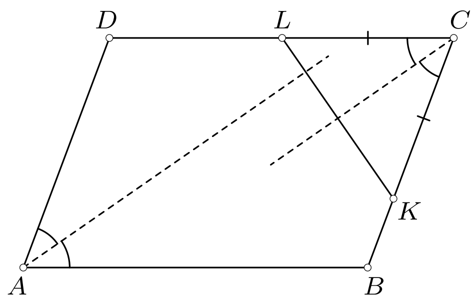
4. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym

$$AB+BK=AD+DL.$$

Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL.

Rozwiązanie

Ponieważ $\sphericalangle BAD=\sphericalangle DCB$, więc dwusieczna kąta BAD tworzy z prostą AD taki sam kąt, jak dwusieczna kąta DCB z prostą CB. W związku z tym, skoro proste AD i CB są równoległe, to także dwusieczne kątów BAD i DCB są równoległe. Wystarczy zatem wykazać, że dwusieczna kąta DCB jest prostopadła do prostej KL.



rys. 4

Przekształćmy daną w treści zadania zależność $AB+BK=AD+DL$ równoważnie w następujący sposób:

$$AB-DL=AD-BK\,,$$
$$CD-DL=BC-BK\,,$$
$$CL=CK\,.$$

Trójkąt KLC jest więc równoramienny, skąd wniosek, że dwusieczna kąta przy jego wierzchołku C jest prostopadła do podstawy KL. To kończy rozwiązanie zadania.

---

5. Tomek zaprosił na zdalne przyjęcie urodzinowe 11 swoich znajomych, którzy kolejno będą dołączać do spotkania. Tomek dobrał gości w taki sposób, aby niezależnie od kolejności w jakiej będą dołączać, zawsze nowo przybyła osoba znała co najmniej połowę już obecnych osób, wliczając Tomka. Wykaż, że wśród zaproszonych gości istnieje taki, który zna wszystkich pozostałych 10 znajomych Tomka.

Uwaga:

Przyjmujemy, że jeśli osoba A zna osobę B, to również B zna A.

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 spośród pozostałych 10 gości.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy pewna osoba, nazwijmy ją A, nie zna pewnych dwóch innych osób, powiedzmy B i C. Gdyby więc do spotkania zdalnego dołączyły najpierw osoby B i C, to spośród trzech osób obecnych już na spotkaniu (B, C i Tomek) A znałaby tylko Tomka, a więc mniej niż połowę wszystkich obecnych. To jednak jest sprzeczne z warunkami zadania.

Stąd wniosek, że każdy znajomy Tomka zna co najmniej 9 innych gości. Gdyby okazało się, że każdy zna dokładnie 9 innych osób, to łączna liczba znajomości w grupie 11 osób byłaby równa $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 11$, a więc nie byłaby liczbą całkowitą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że co najmniej jeden spośród znajomych Tomka musi znać wszystkich pozostałych 10 jego gości.