

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia trzeciego
(17 marca 2012 r.)



1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków BC i AD . Symetralne odcinków AB i CD przecinają odcinek KL odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że jeżeli $KP = LQ$, to proste AB i CD są równoległe.

3. Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b , że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a + b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b . Udowodnij, że

$$d \geq \sqrt{a+b}.$$

4. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby

$$\sqrt{100^n + 2}$$

na n -tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

5. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

