

XI Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody trzeciego stopnia
(19 marca 2016 r.)



1. Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n , że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$.

2. Dodatnie liczby a, b, c są nie większe od 2. Udowodnij, że

$$a + b + c + 2 \geq abc.$$

3. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC . Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M . Wykaż, że $BQ = PQ$.

4. Czy z 32 prostopadłościennych klocków o wymiarach $2 \times 3 \times 3$ można ułożyć prostopadłościan o wymiarach $8 \times 8 \times 9$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Czy istnieje taki wielościan wypukły, w którym każda krawędź jest bokiem pewnej ściany siedmiokątnej tego wielościanu? Odpowiedź uzasadnij.