IV Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Malá Morávka (Czechy), 18 maja 2015 — Zawody indywidualne

Matematyczna Olimpiada Gimnazjalistów
www.omg.edu.pl

Szkice rozwiązań zadań

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym AC jest krótszą przyprostokątną oraz przeciwprostokątna AB ma długość 12. Punkt T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C. Wyznacz miarę kąta wewnętrznego przy wierzchołku B, dla której trójkąt DTC ma największe możliwe pole.

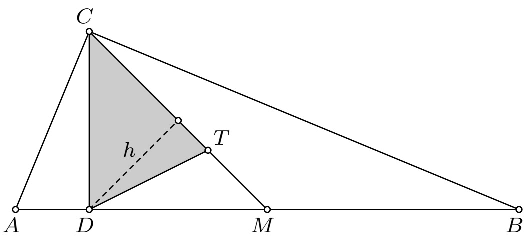
Szkic rozwiązania

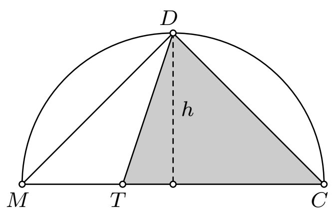
Niech M będzie środkiem boku AB. Skoro $AC < BC$, to punkt D leży na odcinku AM.

Kąt przy wierzchołku C jest prosty, więc M jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wobec tego $CM = \frac{1}{2} \cdot AB = 6$.

Skoro środek ciężkości dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$, to $CT = \frac{2}{3} \cdot CM = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$.

Oznaczmy odległość punktu D od prostej CM przez h. Pole trójkąta DTC wynosi więc $\frac{1}{2} \cdot CT \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot h = 2h$. Pole trójkąta DTC jest zatem największe możliwe dokładnie wtedy, kiedy h jest największe możliwe.





Ponieważ $\sphericalangle CDM = 90°$, więc punkt D leży na okręgu o o średnicy CM. Odległość tego punktu od prostej CM jest największa (i równa promieniowi okręgu o), gdy trójkąt DMC jest równoramienny. Wówczas $\sphericalangle CMA = 45°$ i wobec tego $\sphericalangle CBA = \frac{1}{2} \sphericalangle CMA = 22.5°$.

2. Rozstrzygnij, czy wierzchołki 30-kąta foremnego można ponumerować liczbami $1, 2, \ldots, 30$ w taki sposób, aby suma numerów każdych dwóch sąsiednich wierzchołków była kwadratem pewnej liczby naturalnej.

Szkic rozwiązania

Udowodnimy, że nie jest to możliwe. Przypuśćmy nie wprost, że istnieje numeracja spełniająca warunki zadania. Niech A będzie wierzchołkiem, któremu przypisano liczbę 18. Oznaczmy przez x liczbę przypisaną jednemu z sąsiednich wierzchołków.

Skoro $1 \leqslant x \leqslant 30$, to $19 \leqslant 18 + x \leqslant 48$. Z warunków zadania wynika, że $18 + x$ jest kwadratem liczby naturalnej. W myśl poprzedniej nierówności oznacza to, że $18 + x = 25$ lub $18 + x = 36$, tj. $x = 7$ lub $x = 18$. Jednak $x \neq 18$, gdyż liczba 18 jest przypisana wierzchołkowi A. Stąd $x = 7$.

Analogicznie dowodzimy, że liczbę 7 przypisano drugiemu sąsiedniemu wierzchołkowi A, co nie może mieć miejsca, gdyż liczba 7 może być przypisana tylko jednemu wierzchołkowi. Otrzymana sprzeczność oznacza, że nie da się ponumerować wierzchołków wielokąta zgodnie z warunkami zadania.

3. Liczby rzeczywiste x, y spełniają nierówność $x^2 + y^2 \leqslant 2$. Wykaż, że $xy + 3 \geqslant 2x + 2y$.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że $(x + y - 2)^2 \geqslant 0$, gdyż kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Otwierając nawiasy, otrzymujemy $x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y \geqslant 0$. Z założenia $x^2 + y^2 \leqslant 2$ wynika więc, że $2 + 4 + 2xy - 4x - 4y \geqslant 0$. Stąd $2xy + 6 \geqslant 4x + 4y$, zatem $xy + 3 \geqslant 2x + 2y$.

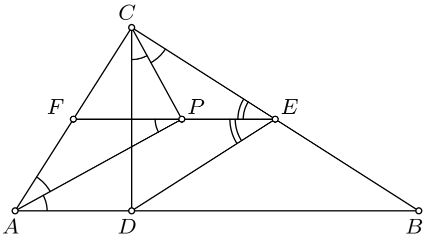
4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle ACB = 90°$. Punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka C, a punkty E i F są środkami odpowiednio boków BC i AC. Dwusieczna kąta BAC przecina prostą EF w punkcie P. Udowodnij, że punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CDE.

Szkic rozwiązania

Oznaczmy $\sphericalangle BAC = 2\alpha$. Zauważmy, że $\sphericalangle FPA = \sphericalangle BAP = \sphericalangle PAF$. To oznacza, że trójkąt AFP jest równoramienny, przy czym $AF = PF$. Skoro zaś F jest środkiem odcinka AC, to $AF = FC$. Zatem $FC = FP$. Wobec tego trójkąt FCP jest równoramienny, a kąt przy jego podstawie ma miarę

$$\sphericalangle FCP = \frac{180° - \sphericalangle PFC}{2} = 90° - \frac{\sphericalangle BAC}{2} = 90° - \alpha.$$

Wobec tego punkt P leży na *odcinku* EF (znajduje się wewnątrz trójkąta ABC).



Z drugiej strony $\sphericalangle ACD = 90° - 2\alpha$ oraz $\sphericalangle DCB = 90° - \sphericalangle ACD = 90° - (90° - 2\alpha) = 2\alpha$. Stąd

$$\sphericalangle DCP = \sphericalangle FCP - \sphericalangle ACD = 90° - \alpha - (90° - 2\alpha) = \alpha = \tfrac{1}{2}\sphericalangle DCB.$$

Zatem prosta CP jest dwusieczną kąta DCE.

Punkty E i F są środkami przeciwprostokątnych BC i AC trójkątów prostokątnych BDC i ADC, więc $CE = ED$ oraz $FC = FD$. Prosta EF jest więc symetralną odcinka CD. Wobec tego jest ona dwusieczną kąta CED.

Wykazaliśmy, że punkt P leży na dwusiecznych kątów DCE oraz CED. Wobec tego punkt P jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CDE.

---

5. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n > 1$ o następującej własności: Dla każdej liczby $d > 1$ będącej dzielnikiem liczby n, liczba $d - 1$ jest dzielnikiem liczby $n - 1$.

Szkic rozwiązania

Wykażemy, że opisaną własność mają tylko liczby pierwsze oraz kwadraty liczb pierwszych.

Jeżeli n jest liczbą pierwszą, to jedynym dzielnikiem n większym od 1 jest $d = n$ i wówczas liczba $n - 1$ jest podzielna przez $d - 1$.

Przypuśćmy, że n jest liczbą złożoną spełniającą zadane warunki. Oznaczmy przez a dowolny dzielnik liczby n taki, że $1 < a < n$. Oznaczmy ponadto $b = n/a$; wówczas także $1 < b < n$ oraz $n = ab$. Ponieważ $a|n$, więc z danego warunku wynika, że $a - 1|ab - 1$. Ponadto $a - 1|b(a - 1)$, skąd wniosek, że liczba $a - 1$ jest dzielnikiem liczby

$$ab - 1 - b(a - 1) = b - 1.$$

W pełni analogicznie uzasadniamy, że liczba $b - 1$ jest dzielnikiem liczby $a - 1$. Ostatnie dwie podzielności mogą zachodzić jednocześnie jedynie, gdy $a - 1 = b - 1$, czyli $a = b$ i $n = a^2$. Ale dzielnik a liczby n został wybrany dowolnie, co oznacza, że n jest kwadratem liczby pierwszej.

Pozostaje sprawdzić, że dla każdej liczby pierwszej p liczba $n = p^2$ spełnia warunki zadania. Istotnie, jeżeli $d = n$, to oczywiście $d - 1|n - 1$, jeżeli zaś $d = p$, to $d - 1 = p - 1$ jest dzielnikiem liczby $(p - 1)(p + 1) = p^2 - 1 = n - 1$.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku