

# 5th Czech-Polish-Slovak Junior Mathematical Match

## Fačkovské sedlo, 15 – 18 May 2016

### Team Competition

(Tuesday, 17th May)

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$ . Označme  $D$  patu výšky z vrcholu  $C$ . Necht  $Q$ ,  $R$  a  $P$  jsou po řadě středy úseček  $AD$ ,  $BD$  a  $CD$ . Dokažte, že platí

$$|\angle APB| + |\angle QCR| = 180^\circ.$$

**Poznámka.** Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Najděte největší možné celé číslo  $d$ , které současně dělí tři trojčiferná čísla  $\overline{abc}$ ,  $\overline{bca}$  a  $\overline{cab}$ , kde  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

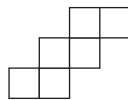
**Uwaga.** Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Na płaszczyźnie poprowadzono pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszystkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych.

**Poznámka.** Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach  $11 \times 11$  podzielonego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby każda płytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawała poza kwadrat oraz żadne dwie nie pokrywały tego samego pola.

- (a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.
- (b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek.



**Poznámka.** Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Daný je trojuholník  $ABC$  taký, že  $|AB| : |AC| : |BC| = 5 : 5 : 6$ . Označme  $M$  stred strany  $BC$  a  $N$  taký bod na strane  $BC$ , že  $|BN| = 5 \cdot |CN|$ . Dokažte, že stred kružnice opísanej trojuholníku  $ABN$  je stredom úsečky spájajúcej stredy kružníc vpísaných trojuholníkom  $ABC$  a  $ABM$ .

**Uwaga.** Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Dané je kladné celé číslo  $k$ . Najdite všetky trojice kladných celých čísel  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ktoré spĺňajú rovnosti

$$a + b + c = 3k + 1,$$
$$ab + bc + ca = 3k^2 + 2k.$$

**Poznámka.** Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.