



6TH CZECH-POLISH-SLOVAK JUNIOR MATHEMATICAL MATCH

SZCZYRK (POLAND), 16TH MAY 2017 — TEAM COMPETITION

1. Rozhodněte, zda existují prvočísla p, q, r taková, že

$$(p^2 + p)(q^2 + q)(r^2 + r)$$

je druhou mocninou některého celého čísla.

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

2. Rozhodněte, zda existuje konvexní šestiúhelník, jehož všechny strany mají délky větší než 1 a všech devět jeho úhlopříček má délky menší než 2.

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Ile jest 8-cyfrowych liczb postaci $*2*0*1*7$, które są podzielne przez 7, gdzie cztery nieznane cyfry zastąpiono gwiazdkami?

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Bolek narysował na tablicy trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD , przy czym $AB > CD$, a w nim jego linię środkową EF . Punkt przecięcia jego przekątnych AC, BD oznaczył przez P , a jego rzut prostokątny na prostą AB oznaczył przez Q . Lolek, chcąc dokuczyć Bolkowi, zmasał z tablicy wszystko oprócz odcinków EF i PQ . Gdy Bolek to zobaczył, chciał uzupełnić rysunek i dorysować wyjściowy trapez, ale nie wiedział jak to zrobić. Czy umiesz pomóc Bolkowi?

POZNÁMKA. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

5. Do každého políčka štvorcovej tabuľky 100×100 vpíšeme číslo 1, 2 alebo 3. Uvažujme všetky podtabuľky $m \times n$, pričom $m \geq 2$ a $n \geq 2$. Podtabuľku nazveme *vyrovnaná*, ak má vo svojich rohových políčkach štyri rovnaké čísla. Pre čo najväčšie číslo k dokážte, že vždy môžeme nájsť k vyrovnaných podtabuliek, z ktorých žiadne dve sa neprekrývajú, t. j. nemajú spoločné políčko.

UWAGA. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Na tabuli je napísaných 100 navzájom rôznych kladných reálnych čísel, pričom pre ľubovoľné tri rôzne čísla a, b, c je číslo $a^2 + bc$ celé. Dokážte, že pre ľubovoľné dve čísla x, y z tabule je číslo $\frac{x}{y}$ racionálne.

POZNÁMKA. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

TIME: 5 HOURS