VI Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Szczyrk (Polska), 16 maja 2017 — Zawody drużynowe

Matematyczna Olimpiada Juniorów www.omj.edu.pl

Szkice rozwiązań zadań

1. Czy istnieją takie liczby pierwsze p, q, r, że liczba
$$(p^2+p)(q^2+q)(r^2+r)$$
jest kwadratem liczby całkowitej?

Szkic rozwiązania

Sposób I

Przypuśćmy, że istnieje dodatnia liczba całkowita n o tej własności, że
$$n^2=(p^2+p)(q^2+q)(r^2+r)=p(p+1)\cdot q(q+1)\cdot r(r+1).$$
Jeżeli $p=q$, to $n^2=(p(p+1))^2r(r+1)$, skąd wynika, że $r(r+1)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Jednak $r^2<r(r+1)<(r+1)^2$, a liczba znajdująca się pomiędzy kwadratami dwóch kolejnych liczb całkowitych sama nie może być kwadratem liczby całkowitej. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $p\neq q$. Analogicznie uzasadniamy, że $q\neq r$ oraz $p\neq r$.

Liczby p, q, r są więc parami różnymi dzielnikami pierwszymi liczby n, a zatem istnieje dodatnia liczba całkowita s o tej własności, że $n=pqrs$. Wówczas
$$(p+1)(q+1)(r+1)=pqrs^2, \quad \text{czyli} \quad \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right)=s^2.$$
Tymczasem
$$1<\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right)\leqslant\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{5}<4,$$
więc znów otrzymujemy sprzeczność, gdyż 1 i 4 to kolejne kwadraty liczb całkowitych. Wobec tego liczby p, q, r o opisanej w treści zadania własności nie istnieją.

Sposób II

Jeżeli $p=q$, to podobnie jak w poprzednim sposobie stwierdzamy, że liczba $r(r+1)$ jest kwadratem liczby całkowitej. Wobec tego, skoro r jest dzielnikiem pierwszym tego kwadratu, to r^2 jest również jego dzielnikiem, skąd uzyskujemy podzielność $r|r+1$, co nie jest prawdą dla żadnej liczby pierwszej r. To oznacza, że $p\neq q$. Podobnie uzasadniamy, że $q\neq r\neq p$.

W przypadku, gdy p, q, r są parami różne, przyjmijmy bez straty ogólności $p<q<r$. Wówczas $r\geqslant 5$. Jeżeli liczba $p(p+1)\cdot q(q+1)\cdot r(r+1)$ jest kwadratem liczby całkowitej, to skoro jest podzielna przez liczbę pierwszą r, to jest także podzielna przez r^2, co oznacza, że r jest dzielnikiem liczby
$$pq(p+1)(q+1)(r+1).$$
Tymczasem $r>q+1>p+1$, więc r nie jest dzielnikiem żadnego z czynników p, q, $p+1$, $q+1$. Liczba r nie jest także dzielnikiem liczby $r+1$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że odpowiedź na postawione w treści zadania pytanie jest negatywna.

---

2. Czy istnieje taki sześciokąt wypukły, że każdy z jego sześciu boków ma długość większą od 1, a każda z jego dziewięciu przekątnych ma długość mniejszą od 2?

Szkic rozwiązania

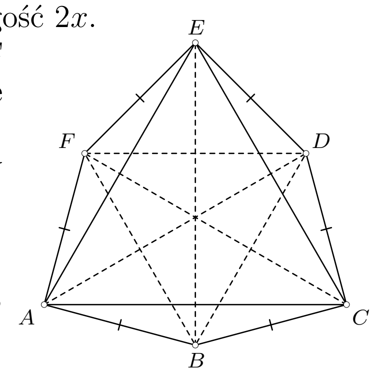
Wykażemy, że sześciokąt o opisanych własnościach istnieje.

Rozważmy trójkąt równoboczny ACE o boku $2x$, przy czym liczbę x sprecyzujemy później. Niech ABC, CDE, EFA będą przystającymi trójkątami równoramiennymi znajdującymi się na zewnątrz trójkąta ACE, takimi że $AD=BE=CF=2x$.

Wówczas każdy bok sześciokąta $ABCDEF$ ma długość równą αx, gdzie

$$\alpha = \sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2},$$

na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do połówki trójkąta ABC. Ponadto przekątne AC, CE, EA, AD, BE, CF tego sześciokąta mają wszystkie długość $2x$.



W trapezie równoramiennym $ABDE$ kąty przy podstawie AE są równe 75°, czyli są ostre, a zatem $BD < AE = 2x$. Podobnie uzyskujemy, że długości przekątnych DF i FB są mniejsze od $2x$.

Aby sześciokąt $ABCDEF$ spełniał zadane warunki wystarczy wybrać taką liczbę x, że

$$\alpha x > 1 \quad \text{oraz} \quad 2x < 2,$$

czyli dowolną liczbę należącą do przedziału $(1/\alpha, 1)$, co jest możliwe, gdyż $\alpha > 1$.

---

3. Ile jest 8-cyfrowych liczb postaci $*2*0*1*7$, które są podzielne przez 7, gdzie cztery nieznane cyfry zastąpiono gwiazdkami?

Szkic rozwiązania

Oznaczmy cztery nieznane cyfry kolejno od lewej przez a, b, c, d, tj. rozważmy liczbę

$$10^7a + 10^5b + 10^3c + 10d + 2000107.$$

Ponieważ liczby 10, 10^3, 10^5, 10^7 oraz 2000107 dają przy dzieleniu przez 7 odpowiednio reszty 3, 6, 5, 3 oraz 4, więc powyższa liczba daje przy dzieleniu przez 7 tę samą resztę co liczba

$$n = 3a + 6b + 5c + 3d + 4.$$

Rozważmy zbiór $M = \{3,4,5,6,7,8,9\}$. Dla ustalonej trójki cyfr a, b, c liczba n daje różne reszty przy dzieleniu przez 7 dla różnych wyborów $d \in M$ (gdyż trzykrotności elementów M dają parami różne reszty przy dzieleniu przez 7). Wobec tego dokładnie $1/7$ spośród wszystkich czwórek (a,b,c,d), w których $d \in M$ ma tę własność, że n jest liczbą podzielną przez 7.

Podobne rozumowania prowadzą do wniosku, że pośród czwórek (a,b,c,d) takich, że

$$c \in M,\ d \notin M \qquad \text{albo} \qquad b \in M,\ c,d \notin M \qquad \text{albo} \qquad a \in M,\ b,c,d \notin M$$

dokładnie $1/7$ stanowią te czwórki, dla których uzyskujemy liczbę n podzielną przez 7.

Pozostał do rozważenia przypadek, gdy $a,b,c,d \notin M$, czyli gdy $a \in \{1,2\}$ oraz $b,c,d \in \{0,1,2\}$, co daje $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ czwórki (a,b,c,d). Z przeprowadzonego dotąd rozumowania wynika, że wśród rozważonych już $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 54 = 8946$ możliwości dokładnie $\frac{1}{7} \cdot 8946 = 1278$ prowadzi do czwórek (a,b,c,d) spełniających warunki zadania.

Jeżeli $a \in \{1,2\}$ oraz $b,c,d \in \{0,1,2\}$, to

$$2 \leqslant 3a + 6b - 2c + 3d + 4 \leqslant 22,$$

a liczba $3a + 6b - 2c + 3d + 4 = n - 7c$ dzieli się przez 7 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba n dzieli się przez 7. Stąd podzielność ta jest możliwa w trzech przypadkach:

1° $3a + 6b - 2c + 3d + 4 = 7$, czyli równoważnie $3(a + 2b + d - 1) = 2c$. Wówczas $c = 0$ oraz $a + 2b + d = 1$, co jest możliwe tylko dla trójki $(a,b,d) = (1,0,0)$.

2° $3a + 6b - 2c + 3d + 4 = 14$, czyli równoważnie $3(a + 2b + d) = 2(5 + c)$. Wówczas $c = 1$ oraz $a+2b+d=4$, co jest możliwe dla następujących czterech trójek (a,b,d): $(2,1,0)$, $(2,0,2)$, $(1,1,1)$, $(1,0,2)$.

3° $3a + 6b - 2c + 3d + 4 = 21$, czyli równoważnie $3(a + 2b + d) = 17 + 2c$. Wówczas $c = 2$ oraz $a + 2b + d = 7$, co jest możliwe dla $(a,b,d) = (1,2,2)$ lub $(a,b,d) = (2,2,1)$.

Otrzymujemy więc 7 dodatkowych czwórek spełniających warunki zadania i ostateczny wynik równy $1278 + 7 = 1285$.

---

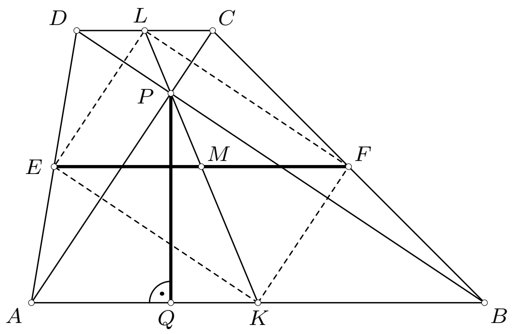
4. Bolek narysował na tablicy trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, przy czym $AB>CD$, a w nim jego linię środkową EF. Punkt przecięcia jego przekątnych AC, BD oznaczył przez P, a jego rzut prostokątny na prostą AB oznaczył przez Q. Lolek, chcąc dokuczyć Bolkowi, zmazał z tablicy wszystko oprócz odcinków EF i PQ. Gdy Bolek to zobaczył, chciał uzupełnić rysunek i dorysować wyjściowy trapez, ale nie wiedział jak to zrobić. Czy umiesz pomóc Bolkowi?

Szkic rozwiązania

Rozważmy konfigurację przed starciem niektórych elementów przez Lolka. Oznaczmy przez K, L, M odpowiednio środki odcinków AB, CD, EF.

Wówczas z własności linii środkowej w trójkątach ABC i ACD uzyskujemy $KF \parallel AC \parallel EL$. Podobnie dla trójkątów ABD i BCD otrzymujemy $KE \parallel BD \parallel FL$. Wobec tego czworokąt $EKFL$ jest równoległobokiem, więc w szczególności jego środek symetrii M jest środkiem przekątnej KL.

W oparciu o poczynione obserwacje przedstawimy sposób odtworzenia punktów A, B, C, D na podstawie znajomości położenia punktów E, F, P, Q.



Punkt M konstruujemy jako środek odcinka EF. Następnie punkt K wyznaczamy jako punkt przecięcia prostej MP ($P \neq M$, gdyż $ABCD$ nie jest równoległobokiem) z prostą a prostopadłą do odcinka PQ i przechodzącą przez punkt Q (jest to prosta zawierająca AB). Punkt L kreślimy jako symetryczny do punktu K względem punktu M, a prostą b (zawierającą podstawę CD) — jako równoległą do EF i przechodzącą przez L. Wreszcie prowadząc przez P prostą równoległą do KF, otrzymujemy punkty A i C w przecięciu odpowiednio z prostymi a i b. Analogicznie, prowadząc przez P prostą równoległą do KE, otrzymujemy punkty B i D.

---

5. Każde pole tablicy 100×100 zawiera jedną z liczb 1, 2, 3. Rozważamy wszystkie *podtablice* $m\times n$, gdzie $m \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 2$. Każdą taką podtablicę nazwiemy *wyważoną*, jeżeli jej cztery narożne pola zawierają tę samą liczbę. Udowodnij dla największej liczby k, dla jakiej potrafisz, następujące stwierdzenie: zawsze (niezależnie od wyjściowego wpisania liczb) istnieje k parami rozłącznych wyważonych podtablic, tzn. takich, że żadne dwie z nich nie mają wspólnych pól.

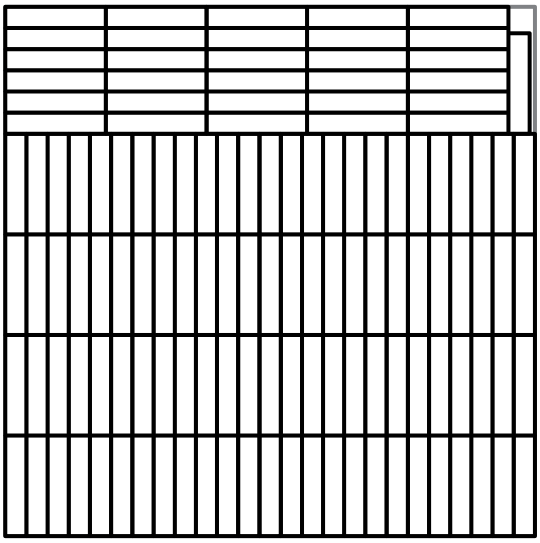
Szkic rozwiązania

Przedstawimy dowód dla $k=131$, czyli wykażemy, że zawsze istnieje co najmniej 131 parami rozłącznych wyważonych podtablic.

Rozważmy dowolną podtablicę o wymiarach 19×4. Jej każdy wiersz 1×4 jest *zdominowany* przez co najmniej jedną z liczb 1, 2, 3 (tzn. ma co najmniej dwa pola zawierające tę samą liczbę), więc każdemu takiemu wierszowi możemy przyporządkować liczbę w nim dominującą (jeżeli takie liczby są dwie, wybieramy dowolną z nich). Wówczas pośród wszystkich $3\cdot6+1=19$ wierszy rozważanej podtablicy jest co najmniej 7 zdominowanych przez tę samą liczbę.

Ponadto, istnieje dokładnie 6 możliwości wyboru pary pól w wierszu 1×4. Zatem pośród dowolnych 7 wierszy zdominowanych przez tę samą liczbę istnieją co najmniej dwa, w których ta liczba występuje w tych samych dwóch kolumnach. Cztery pola na przecięciu tych dwóch wierszy i kolumn wyznaczają wyważoną podtablicę.

Wykazaliśmy, że każda podtablica 4×19 zawiera co najmniej jedną wyważoną podtablicę. w pełni analogicznie przebiega rozumowanie dla podtablic 19×4. Aby zakończyć dowód, wystarczy wyróżnić 131 parami rozłącznych takich podtablic wewnątrz tablicy 100×100. Jest to pokazane na rysunku, gdzie 100 podtablic ułożonych jest w prostokąt 76×100, 30 tworzy prostokąt 24×95, a jedna jest zawarta wewnątrz pozostałego prostokąta 24×5.



Uwaga

Największa stała k, dla której sformułowana w treści zadania własność zachodzi nie jest znana. Można natomiast zauważyć, że

$$131=\lfloor 100^2/76\rfloor,$$

więc $k=131$ jest najlepszym wynikiem, który można uzyskać w oparciu o obserwację dotyczącą tablic 4×19.

Można także udowodnić, że każda podtablica wymiarów 4×36 zawiera co najmniej dwie rozłączne wyważone podtablice, co pozwala zwiększyć wartość k, dla której sformułowana w treści zadania własność zachodzi, do 138.

---

6. Na tablicy napisanych jest 100 parami różnych dodatnich liczb rzeczywistych, przy czym dla każdych trzech parami różnych liczb a, b, c napisanych na tablicy, liczba a^2+bc jest całkowita. Wykaż, że dla każdych dwóch liczb x, y napisanych na tablicy, liczba $\frac{x}{y}$ jest wymierna.

Szkic rozwiązania

Niech x, y będą dowolnymi dwiema różnymi liczbami napisanymi na tablicy i niech a, b, c będą dowolnymi trzema (parami różnymi) spośród pozostałych liczb. Wówczas liczby

$$a^2+xb \quad \text{oraz} \quad a^2+xc$$

są całkowite, więc ich różnica $x(b-c)$ również jest liczbą całkowitą. Podobnie liczby

$$a^2+yb \quad \text{oraz} \quad a^2+yc$$

są całkowite, więc również $y(b-c)$ jest liczbą całkowitą. Łącząc powyższe obserwacje, uzyskujemy, że iloraz

$$\frac{x(b-c)}{y(b-c)}=\frac{x}{y}$$

jest liczbą wymierną.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku