



## 8. CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW

ZUBEREC (SŁOWACJA), 20 MAJA 2019 — ZAWODY INDYWIDUALNE

1. Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych  $a, b$ , dla których

$$\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{a-2\sqrt{b}} + \sqrt{b}.$$

2. Punkt  $T$  jest środkiem ciężkości trójkąta  $ABC$ , a punkt  $M$  jest środkiem boku  $BC$ . Oznaczmy przez  $D$  taki punkt prostej  $AB$  różny od  $A$ , że  $AB = BD$ . Podobnie niech  $E$  będzie takim punktem prostej  $AC$  różnym od  $A$ , że  $AC = CE$ . Odcinki  $TD$  i  $TE$  przecinają bok  $BC$  odpowiednio w punktach  $P$  i  $Q$ . Wykaż, że punkty  $P, Q, M$  dzielą odcinek  $BC$  na cztery części o równych długościach.

3. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite  $n$  o tej własności, że tablicę o wymiarach  $n \times n$  można wypełnić liczbami 1, 2 oraz  $-3$  w taki sposób, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie suma wpisanych liczb była równa 0.

4. Niech  $k$  będzie okręgiem o średnicy  $AB$ . Punkt  $C$  wybrano wewnątrz odcinka  $AB$ , a punkt  $D$  na okręgu  $k$  w taki sposób, że trójkąt  $BCD$  jest ostrokątny. Oznaczmy środek okręgu opisanego na tym trójkącie przez  $O$ , a (różny od  $B$ ) punkt przecięcia okręgu  $k$  z prostą  $BO$  przez  $E$ . Wykaż, że trójkąty  $BCD$  oraz  $ECA$  są podobne.

5. W pewnej grupie każdy ma dokładnie  $d$  znajomych oraz każde dwie osoby, które się nie znają, mają dokładnie jednego wspólnego znajomego. Wykaż, że liczba osób w tej grupie nie przekracza  $d^2 + 1$ .

CZAS: 3 GODZINY 30 MINUT