Olimpiada Matematyczna Juniorów
www.omj.edu.pl

VIII Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów

Zuberec (Słowacja), 21 maja 2019 r. — Zawody drużynowe

Szkice rozwiązań zadań

1. Liczby wymierne a, b są takie, że liczby $a+b$ oraz a^2+b^2 są całkowite. Wykaż, że liczby a, b są całkowite.

Szkic rozwiązania

Zauważmy, że liczba

$$2(a^2+b^2)-(a+b)^2=(a-b)^2$$

jest całkowita, więc również liczba $a-b$ jest całkowita (jako liczba wymierna, której kwadrat jest liczbą całkowitą). W konsekwencji liczby $(a+b)+(a-b)=2a$ oraz $(a+b)-(a-b)=2b$ są całkowite.

Skoro $a+b$ jest liczbą całkowitą, to jeśli jedna z liczb a, b jest całkowita, to druga także. Przypuśćmy więc nie wprost, że żadna z liczb a, b nie jest całkowita, czyli $a=m+\frac{1}{2}$, $b=n+\frac{1}{2}$ dla pewnych liczb całkowitych m, n. Wówczas

$$a^2+b^2=m^2+m+n^2+n+\tfrac{1}{2}$$

nie jest liczbą całkowitą. Uzyskana sprzeczność kończy rozwiązanie.

---

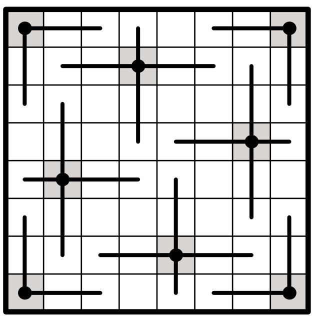
2. *Kulawa wieża* to figura szachowa, która zagraża polu szachownicy dokładnie wtedy, gdy pole znajduje się w tym samym wierszu lub kolumnie co wieża i pomiędzy nimi jest co najwyżej jedno pole odstępu. Na kwadratowej szachownicy ustawiamy kulawe wieże w taki sposób, aby żadne dwie sobie nie zagrażały oraz żadne pole nie było zagrożone przez więcej niż jedną wieżę.

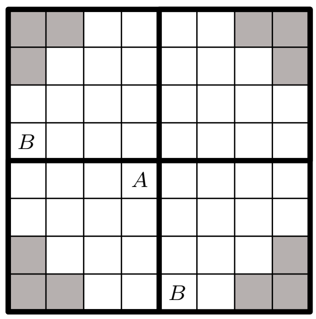
(a) Wykaż, że na szachownicy 30×30 nie można ustawić więcej niż 100 kulawych wież.
(b) Wyznacz największą liczbę kulawych wież, które można ustawić na szachownicy 8×8.
(c) Wykaż, że na szachownicy 32×32 nie można ustawić więcej niż 120 kulawych wież.

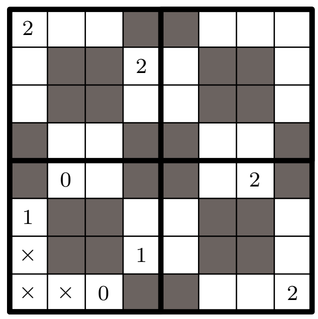
Szkic rozwiązania

(a) Zauważmy, że w obrębie dowolnego kwadratu 3×3 może znajdować się co najwyżej jedna kulawa wieża. Ponieważ szachownicę 30×30 można podzielić na 100 takich kwadratów w taki sposób, aby każde pole należało do dokładnie jednego z nich, więc na szachownicy można umieścić co najwyżej 100 wież.

(b) Rozważmy dowolny kwadrat 4×4. Zauważmy, że jeśli w jednym z jego czterech środkowych pól stoi kulawa wieża, to jest to jedyna wieża w tym kwadracie. W przeciwnym razie wewnątrz tego kwadratu mogą stać co najwyżej dwie kulawe wieże — przylegające do pewnej pary przeciwległych boków kwadratu. Wobec tego na szachownicy 8×8 może stać co najwyżej 8 kulawych wież — pierwszy rysunek ilustruje przykładowe rozmieszczenie właśnie takiej liczby.







(c) Wykażemy, że jeśli na szachownicy 8×8 stoi dokładnie 8 kulawych wież, to każdy z czterech zacieniowanych na drugim rysunku narożnych *L-obszarów* zawiera wieżę.

Wiemy już, że każda ćwiartka 4×4 zawiera po dwie wieże i nie znajdują się one w jej środkowych polach. Zauważmy, że na żadnym z czterech centralnych pól kwadratu 8×8 nie może stać wieża. Rzeczywiście, gdyby np. pole A było zajęte przez wieżę, to w prawej dolnej oraz lewej górnej ćwiartce wieże musiałyby stać na polach B — wtedy jednak w lewej dolnej ćwiartce nie zmieściłaby się druga wieża. W konsekwencji, skoro na polu A nie może stać wieża, to również na polu B nie może stać wieża, bo uniemożliwiłaby ustawienie dwóch wież w lewej dolnej ćwiartce.

Z przeprowadzonych rozumowań wynika, że jeśli na szachownicy 8×8 stoi 8 kulawych wież, to żadne z pól zacieniowanych na trzecim obrazku nie jest zajęte przez wieżę. Jeśli założymy, że w pewnym L-obszarze (dla ustalenia uwagi — lewym dolnym) nie ma wieży, to w lewej dolnej ćwiartce wieże zajmują pola 0 lub pola 1. W obu przypadkach jedyną możliwością jest, że wieże w prawej dolnej i lewej górnej ćwiartce zajmują pola 2. Jednak wówczas nie można umieścić dwóch wież w prawej górnej ćwiartce. Otrzymana sprzeczność oznacza, że w istocie w każdym L-obszarze musi stać wieża.

Ponieważ szachownicę 32×32 można podzielić na 8 prostokątów o wymiarach 8×16, więc wystarczy wykazać, że w jednym takim prostokącie można ustawić co najwyżej 15 wież. Z rozwiązania poprzedniego punktu wiemy, że wież nie może być więcej niż 16. Przypuśćmy nie wprost, że udało się umieścić 16 kulawych wież na polach prostokąta 8×16 — wynika z tego, że w każdym z dwóch kwadratów 8×8, z których ułożony jest ten prostokąt, stoi po osiem wież. Jednak w dwóch przylegających do siebie narożnych L-obszarach (pochodzących z różnych kwadratów 8×8) nie mogą jednocześnie znaleźć się wieże. Otrzymana sprzeczność kończy rozwiązanie.

---

3. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym o prostopadłych przekątnych, w którym

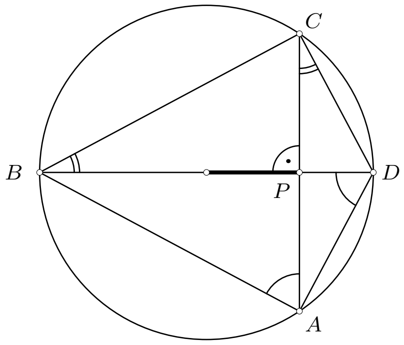
$$\measuredangle BAC = \measuredangle ADB, \quad \measuredangle CBD = \measuredangle DCA, \quad AB = 15, \quad CD = 8.$$

Wykaż, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg oraz wyznacz odległość między środkiem tego okręgu a punktem przecięcia przekątnych czworokąta.

Szkic rozwiązania

Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Z równości $\measuredangle BAP = \measuredangle ADB$ wynika, że trójkąty PBA i ABD są podobne, skąd $\measuredangle BAD = \measuredangle BPA = 90°$. Analogicznie z równości $\measuredangle CBD = \measuredangle DCP$ wynika podobieństwo trójkątów PBC i CBD, a w konsekwencji równość $\measuredangle BCD = \measuredangle BPC = 90°$.

Skoro $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = 90°$, to czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o średnicy BD. Ponieważ cięciwa AC jest prostopadła do tej średnicy, więc punkty A i C są względem niej symetryczne, a zatem trójkąty ABD i CBD są przystające.



Z twierdzenia Pitagorasa uzyskujemy $BD = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$, a z zależności

$$\frac{AD}{PD} = \frac{BD}{AD}$$

mamy $PD = 64/17$. Pozostaje zauważyć, że szukana odległość jest różnicą między promieniem okręgu opisanego na $ABCD$ a długością odcinka PD, więc wynosi $17/2 - 64/17 = 161/34$.

---

4. Wyznacz wszystkie możliwe wartości wyrażenia $xy+yz+zx$, gdzie liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunki $x^2-yz=y^2-zx=z^2-xy=2$.

Szkic rozwiązania

Odpowiedź: Jedyna możliwa wartość to -2.

Z równości $x^2-yz=y^2-zx$ wynika, że

$$(x-y)(x+y+z)=(x-y)(x+y)+z(x-y)=x^2-y^2-yz+zx=0,$$

skąd $x=y$ lub $x+y+z=0$. Podobnie z równości $x^2-yz=z^2-xy$ wynika, że $x=z$ lub $x+y+z=0$. Stąd jeżeli $x+y+z\neq 0$, to $x=y=z$ i wówczas $x^2-yz=0\neq 2$. Uzyskana sprzeczność oznacza, że $x+y+z=0$.

Z konkluzji poprzedniego akapitu wynika, że jeśli liczby x, y, z spełniają dane warunki, to

$$0=(x+y+z)^2=(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)+3(xy+yz+zx)=6+3(xy+yz+zx),$$

czyli $xy+yz+zx=-2$. Pozostaje sprawdzić, że w istocie istnieją liczby x, y, z, dla których ta wartość jest osiągana. W tym celu wystarczy przyjąć na przykład $(x,y,z)=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$.

---

5. Dany jest 360-kąt foremny $A_1A_2\ldots A_{360}$ o środku w punkcie S. Dla każdego z trójkątów $A_1A_{50}A_{68}$, $A_1A_{50}A_{69}$ rozstrzygnij, czy istnieje układ 120 obrotów wokół punktu S o tej własności, że obrazy wierzchołków danego trójkąta przy tych obrotach pokrywają wszystkie 360 punktów A_1, A_2, $\ldots$, A_{360}.

Szkic rozwiązania

W rozwiązaniu przez A_i dla $i>360$ będziemy rozumieli punkt A_{i-360}.

Udowodnimy najpierw, że dla trójkąta $A_1A_{50}A_{69}$ odpowiedź na postawione pytanie jest twierdząca. Rozważmy rodzinę 120 trójkątów postaci $A_{3k+1}A_{3k+50}A_{3k+69}$ dla $k=0,1,\ldots,119$ (każdy taki trójkąt jest obrazem danego trójkąta przy obrocie wokół S o $3k$ stopni). W obrębie jednego trójkąta indeksy wierzchołków dają parami różne reszty przy dzieleniu przez 3. W związku z tym żadne dwa wierzchołki w rozważanej rodzinie trójkątów się nie pokrywają.

Wykażemy, że dla trójkąta $A_1A_{50}A_{68}$ nie istnieje szukany układ 120 obrotów. Przypuśćmy, że istnieje 120-elementowy zbiór H nieujemnych liczb całkowitych mniejszych od 360 (reszt z dzielenia przez 360) o tej własności, że wierzchołki 120 trójkątów $A_hA_{h+49}A_{h+67}$, gdzie $h\in H$, są różne (i wyczerpują zbiór wierzchołków danego 360-kąta). Możemy bez straty ogólności założyć, że $0\in H$ (w razie potrzeby odejmując od wszystkich elementów zbioru H wartość jego najmniejszego elementu).

Ponieważ $49\notin H$ oraz $67\notin H$, więc liczba $49+67=116$ nie jest ani postaci $49+h$, ani $67+h$, gdzie $h\in H$. Wynika z tego, że $116\in H$. Powtarzając analogiczne rozumowanie, stwierdzamy, że reszty z dzielenia liczb $2\cdot 116$, $3\cdot 116$, $\ldots$, $89\cdot 116$ przez 360 należą wszystkie do zbioru H. Ponieważ $90<120$, więc istnieje liczba $h'\neq H$ która nie jest żadną z tych 90 reszt, a w związku z tym reszty z dzielenia wszystkich liczb postaci $h'+116$, $h'+2\cdot 116$, $\ldots$, $h'+89\cdot 116$ przez 360 również należą do zbioru H. Nietrudno przekonać się, że znalezione 180 reszt to parami różne liczby. Ale zbiór H ma tylko 120 elementów — uzyskana sprzeczność kończy dowód.

---

6. Dany jest czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DA w taki sposób, że spełnione są równości

$$\sphericalangle ADK=\sphericalangle BCK,\quad \sphericalangle BAL=\sphericalangle CDL,\quad \sphericalangle CBM=\sphericalangle DAM,\quad \sphericalangle DCN=\sphericalangle ABN.$$

Udowodnij, że proste KM i LN są prostopadłe.

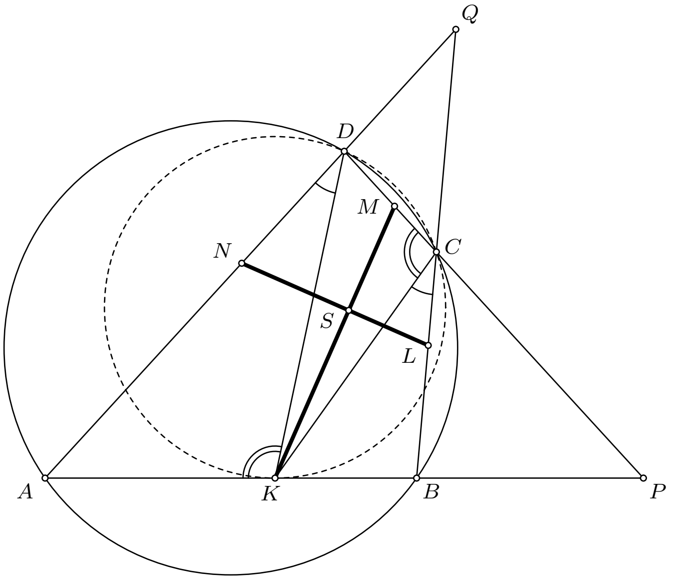
Szkic rozwiązania

Zauważmy, że skoro czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to

$$\sphericalangle ADK+\sphericalangle AKD=180^\circ-\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCD=\sphericalangle BCK+\sphericalangle KCD,$$

skąd wobec danej równości $\sphericalangle ADK=\sphericalangle BCK$ uzyskujemy $\sphericalangle AKD=\sphericalangle KCD$. Równość ta w połączeniu z faktem, że punkty C i D leżą po tej samej stronie prostej AB oznacza, że okrąg opisany na trójkącie CDK jest styczny do odcinka AB. W pełni analogiczne rozumowania można przeprowadzić dla punktów L, M, N.

Jeśli boki AB i CD są równoległe, to konfiguracja punktów w zadaniu jest symetryczna względem osi symetrii trapezu $ABCD$. W szczególności punkty K i M leżą na tej osi symetrii, a prosta LN jest do niej prostopadła. Podobnie tezę zadania uzasadniamy w przypadku, gdy proste AD i BC są równoległe. W dalszej części rozwiązania załóżmy więc, że proste AB i CD przecinają się w punkcie P, a proste AD i BC przecinają się w punkcie Q.



Ponieważ okręgi opisane na trójkątach CDK i ABM są styczne do prostych AB i CD odpowiednio w punktach K i M, więc $PK^2 = PC \cdot PD$ oraz $PM^2 = PA \cdot PB$. Ponadto, skoro czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Łącząc te równości, uzyskujemy $PK = PM$. Analogicznie dochodzimy do wniosku, że $QL = QN$.

Oznaczmy punkt przecięcia odcinków KM i LN przez S. Z równości $\sphericalangle PKM = \sphericalangle PMK$ wynika, że $\sphericalangle AKS + \sphericalangle CMS = 180°$. Podobnie otrzymujemy $\sphericalangle ANS + \sphericalangle CLS = 180°$. Wreszcie $\sphericalangle KAN + \sphericalangle LCM = 180°$. Wykorzystując te równości dochodzimy do wniosku, że suma miar ośmiu kątów wewnętrznych czworokątów $AKSN$ oraz $CLSM$ to $540° + \sphericalangle KSN + \sphericalangle LSM$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle KSN = \sphericalangle LSM = 90°$, co było do udowodnienia.

Uwaga

Wykorzystane równości $PK^2 = PC \cdot PD$, $PM^2 = PA \cdot PB$ oraz $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ wynikają bezpośrednio z podobieństw par trójkątów PCK i PKD, PBM i PMA oraz PBC i PDA. Można się do nich odwołać także za pomocą tzw. *potęgi punktu względem okręgu*.

MINISTERSTWO EDUKACJI NARODOWEJ

Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

Fundacja

Olimpiada Matematyczna Juniorów jest współfinansowana ze środków krajowych Ministerstwa Edukacji Narodowej
Olimpiadę dofinansowuje Fundacja mBanku