



**XII CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE  
ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW**

Zawody indywidualne  
20 maja 2024 r.

**Zadanie 1.** Początkowo na tablicy napisane są liczby 1 oraz 2. *Ruch* polega na wyborze dodatniej liczby rzeczywistej  $x$  i zastąpieniu pary  $(a, b)$  liczb napisanych na tablicy parą

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right).$$

Czy można (w skończenie wielu ruchach) doprowadzić do sytuacji, w której dwiema liczbami napisanymi na tablicy są 2 oraz 3?

**Zadanie 2.** Ile jest niepustych podzbiorów zbioru  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$  o tej własności, że iloczyn wszystkich elementów podzbioru jest sześcianem liczby całkowitej?

**Zadanie 3.** Dany jest czworokąt wypukły  $ABCD$ , w którym  $AB = BD = DC$  oraz  $AB \perp BD \perp DC$ . Punkt  $M$  jest środkiem boku  $BC$ . Wykaż, że  $\sphericalangle BAM + \sphericalangle DCA = 45^\circ$ .

**Zadanie 4.** Liczby całkowite  $a, b, c$  spełniają warunki  $a + b + c = 1$  oraz  $ab + bc + ca < abc$ . Wykaż, że

$$ab + bc + ca < 2abc.$$

**Zadanie 5.** Dla dodatniej liczby całkowitej  $n$  oznaczmy przez  $S(n)$  sumę cyfr w zapisie dziesiętnym liczby  $n$ . Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą  $n$ , dla której spełniona jest równość  $4 \cdot S(n) = 3 \cdot S(2n)$ .

*Czas: 3 godziny 30 minut  
Za każde zadanie można otrzymać 5 punktów.*