

XIV CZESKO-POLSKO-SŁOWACKIE ZAWODY MATEMATYCZNE JUNIORÓW

Zawody drużynowe
24 maja 2026 r.

Zadanie 1. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają warunek

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abc + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

Udowodnij, że iloczyn abc jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 2. Mamy do dyspozycji liniał euklidesowy, który pozwala nam narysować prostą przechodzącą przez dwa dane punkty, oraz specjalne narzędzie zwane *opisantem*. Pozwala ono dla dowolnego trójkąta narysować okrąg opisany na nim wraz z jego środkiem. Dany jest trójkąt ABC . Korzystając z tych dwóch narzędzi, skonstruuj:

- środek ciężkości trójkąta ABC ,
- okrąg wpisany w trójkąt ABC .

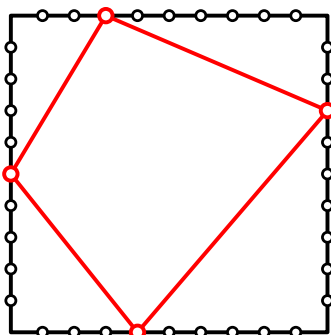
Zadanie 3. Rozważmy wszystkie uporządkowane trójki dodatnich liczb całkowitych (x, y, z) , w których każda liczba jest nie większa niż 100. Dla każdej z nich zapisujemy na kartce wartość

$$|x - y| + |y - z| + |z - x|.$$

Która wartość została zapisana najczęściej i ile razy ją zapisano?

Zadanie 4. Parę liczb całkowitych nazywamy *dobrą*, jeśli możemy zapisać te liczby obok siebie w taki sposób, że ich cyfry tworzą ciąg niemalejący. Załóżmy, że zbiór $S \subseteq \{1, 2, \dots, 99\}$ nie zawiera żadnej pary dobrych liczb. Jaka jest największa możliwa liczebność zbioru S ?

Zadanie 5. Dany jest kwadrat o boku 10, a każdy jego bok został podzielony przez 9 punktów na 10 odcinków o długości 1. Dwaj gracze grają w grę, w której na zmianę wybierają jeszcze niewybrany bok kwadratu i kolorują na nim jeden z 9 zaznaczonych punktów. Na koniec cztery pokolorowane punkty są łączone, tworząc czworokąt wypukły. Celem drugiego gracza jest, aby pole tego czworokąta było równe zadanej wartości S . Celem pierwszego gracza jest mu w tym przeszkodzić. W zależności od S rozstrzygnij, który gracz ma strategię wygrywającą.



Zadanie 6. Liczby a, b, c, d, e są liczbami całkowitymi, a suma dowolnych dwóch z nich jest większa od ich iloczynu. Udowodnij, że

$$a + b + c + d + e > abcde.$$

Czas: 5 godzin
Każde zadanie jest warte 5 punktów.