Internetowe Kółko
Olimpiady Matematycznej Juniorów

2018/2019
2019/2020

Warszawa 2024

Autorzy: Jagoda Bracha, Mateusz Gabzdyl, Paweł Gadziński, Stanisław Hauke, Kosma Kasprzak, Iwo Pilecki-Silva, Michał Szwej, Tomasz Ślusarczyk, Radosław Żak

Konsultacja merytoryczna: dr Arkadiusz Męcel

Rysunki: Paweł Gadziński, Radosław Żak

Spis treści

Podpowiedzi **108**

Rozwiązania **132**

Wstęp

Internetowe Kółko OMJ było inicjatywą, mającą na celu ułatwić przygotowanie do Olimpiady Matematycznej Juniorów. W jej ramach publikowaliśmy skrypty, które miały przybliżyć pewne zagadnienia teoretyczne, a przede wszystkim nauczyć stosować je w zadaniach. Zorganizowaliśmy także pięć konkursów treningowych, które formą odpowiadały zawodom 2 i 3 etapu olimpiady. Broszura jest opracowana na podstawie materiałów publikowanych na stronie Olimpiady na Facebooku.

Chcielibyśmy bardzo serdecznie podziękować wszystkim, dzięki którym ta broszura mogła zostać wydana. Dziękujemy dr. Waldemarowi Pompe i dr. Arkadiuszowi Męclowi, przewodniczącym Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej Juniorów, za możliwość działania pod szyldem Olimpiady oraz nieocenione rady. Dziękujemy Panu Tomaszowi Szymczykowi za wsparcie przy procesie wydawania broszury i rady dotyczące składu tekstu.

Jagoda Bracha
Mateusz Gabzdyl
Paweł Gadziński
Stanisław Hauke
Kosma Kasprzak
Iwo Pilecki-Silva
Michał Szwej
Tomasz Ślusarczyk
Radosław Żak

Jak korzystać z broszury?

Przed Tobą znajduje się sporo materiałów, z których możesz dowiedzieć się bardzo wielu rzeczy. Chcemy jednak udzielić Ci kilku rad, aby czas spędzony z książką był owocny.

Każdy z rozdziałów zaczyna się od wstępu i dwóch zadań przykładowych. Służą one temu, aby przyswoić sobie nową dawkę teorii oraz nauczyć się z niej korzystać. Następnie prezentujemy zadania nawiązujące do teorii przedstawionej w danym rozdziale. Zadania są ułożone według ich trudności, przy czym pierwsze z nich są stosunkowo łatwe, a ostatnie mogą być sporym wyzwaniem dla doświadczonych olimpijczyków. Zazwyczaj kilka pierwszych problemów wymaga jedynie zastosowania teorii ze wstępu, te zaś o wyższych numerach często łączą w sobie kilka zagadnień. Zachęcamy do pomyślenia nad wszystkimi zadaniami, a w razie braku postępów — do zobaczenia podpowiedzi lub przeczytania rozwiązania.

Najważniejszą rzeczą, której możesz się nauczyć z lektury tej książki jest umiejętność myślenia matematycznego. Tej umiejętności nie można zdobyć czytając rozwiązania czy wstępy teoretyczne, choć to też jest ważne. Rozwija się ją przez samodzielne myślenie nad zadaniami, szczególnie nad tymi, które są dla nas trudne. Staraj się próbować różnych pomysłów, analizuj szczególne przypadki. Gdy rozwiązujesz zadanie z geometrii, pamiętaj o czytelnym rysunku (najlepiej dużym). Próbuj dodawać do niego własne elementy, takie jak nowe punkty, okręgi, czy też obiekty powstałe przy symetrii lub obrocie. Być może przez dłuższy czas nie będziesz miał pomysłu, jak w ogóle zacząć. Możesz wtedy skorzystać ze wskazówki, przeczytać rozwiązanie lub odłożyć problem na później.

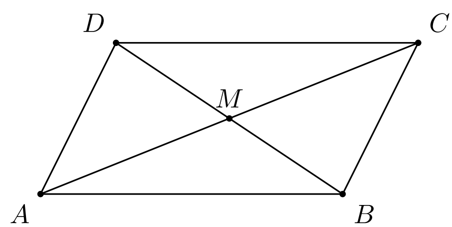
Życzymy Ci mile spędzonego czasu i owocnej pracy!

Teoria i zadania

1 Trapezy równoramienne i równoległoboki

W konfiguracjach geometrycznych ważne jest rozpoznawanie szczególnych figur. Zaliczają się do nich trapezy równoramienne i równoległoboki. Przypomnijmy ich najważniejsze własności.

Równoległobok



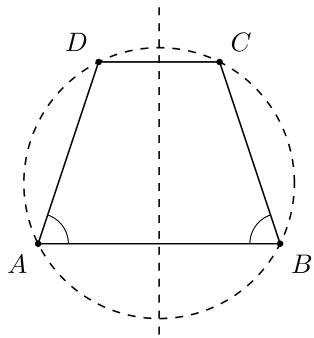
Czworokąt nazywamy równoległobokiem, gdy obydwie pary jego przeciwległych boków są równe oraz równoległe.

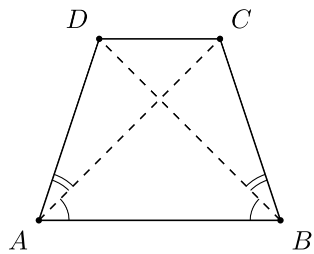
- Jeśli dla czwórki punktów A, B, C, D odcinki AB i CD są równe i równoległe, to wtedy czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem. To pociąga za sobą wniosek, że $AD = BC$ oraz $AD \parallel BC$.

- Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$. Wówczas czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy punkt M jest środkiem jego przekątnych, czyli gdy $MA = MC$ i $MB = MD$.

Trapez równoramienny

Czworokąt nazwiemy trapezem, jeśli posiada parę boków równoległych, nazywanych podstawami trapezu. Pozostałe dwa boki nazywamy ramionami trapezu. Mówimy, że trapez jest równoramienny w jednym z dwóch przypadków: albo jeśli ma ramiona równej długości oraz nie jest równoległobokiem, albo jeśli jest prostokątem.





Niech AB oraz CD będą podstawami trapezu równoramiennego $ABCD$. Wówczas (poniższe fakty traktujemy jako „znane”):

- kąty wewnętrzne przy podstawach trapezu są równe, to znaczy

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD,$$

- przekątne trapezu równoramiennego są równej długości, czyli

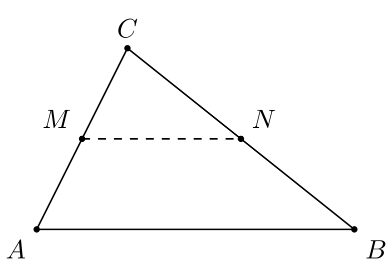
$$AC = BD,$$

- zachodzą równości kątów

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CBD = \sphericalangle DAC$$

- trapez $ABCD$ posiada oś symetrii, która jest wspólną symetralną jego podstaw,
- na trapezie $ABCD$ można opisać okrąg.

Twierdzenie o linii środkowej

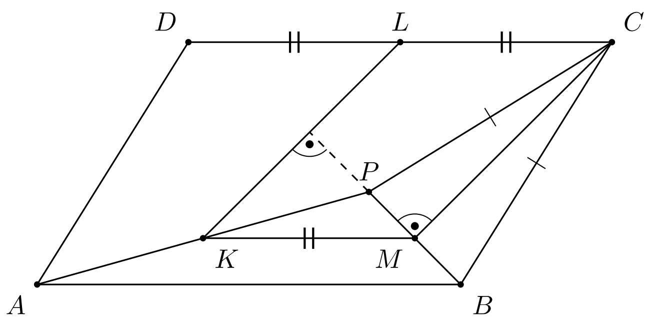


Niech punkty M i N będą środkami odcinków AC i BC. Wówczas odcinki MN i AB są równoległe oraz $MN = \frac{1}{2}AB$.

Przykład 1 (XIII OMJ, zawody I stopnia)
Wewnątrz równoległoboku $ABCD$ leży taki punkt P, że $PC = BC$. Udowodnij, że prosta BP jest prostopadła do prostej łączącej środki odcinków AP i CD.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez K, L, M środki odpowiednio odcinków AP, CD, BP. Wówczas prosta CM jest prostopadła do prostej BP jako wysokość trójkąta równoramiennego BCP opuszczona z wierzchołka C. Aby rozwiązać zadanie, wystarczy więc udowodnić, że proste KL i CM są równoległe.



Skoro KM łączy środki dwóch boków AP i BP w trójkącie ABP, to $KM = \frac{1}{2}AB$ oraz proste KM i AB są równoległe. Ponadto proste LC i AB są równoległe oraz

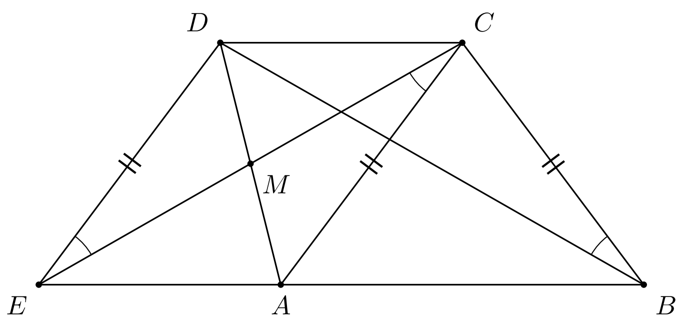
$$LC = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB.$$

Łącząc powyższe obserwacje, wnioskujemy, że odcinki KM i LC są równoległe oraz mają równą długość. To oznacza, że czworokąt $KMCL$ jest równoległobokiem. W szczególności proste KL i CM są równoległe, co kończy rozwiązanie zadania.

Uwaga
Powyższe rozwiązanie pochodzi z oficjalnych materiałów Komitetu Głównego OMJ dostępnych na stronie Olimpiady w zakładce `https://omj.edu.pl/zadania`, gdzie przedstawione są również dwa inne sposoby uzasadnienia tezy oraz odsyłacze do dwóch artykułów w Gazetce OMJ *Kwadrat*. Zachęcamy do lektury!

Przykład 2 (XIV OMJ, zawody III stopnia)
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym $AC = BC$. Punkt M jest środkiem ramienia AD. Wykaż, że $\sphericalangle ACM = \sphericalangle CBD$.

Rozwiązanie
Wiadomo, że punkt M jest środkiem odcinka AD. Spróbujemy skonstruować taki równoległobok, aby M był punktem wspólnym jego przekątnych. Oznaczmy taki punkt E na prostej AB — przy czym punkt A należy do odcinka EB — aby zachodziła równość $EA = CD$. Wówczas odcinki EA i CD są równe i równoległe, a więc czworokąt $EACD$ jest równoległobokiem. Stąd przekątna CE przechodzi przez środek odcinka AD, czyli przez punkt M.



Ponadto $ED = AC = BC$, skąd wniosek, że trapez $EBCD$ jest równoramienny. Zauważmy, że z jednej z własności trapezu równoramiennego, podanej na początku, mamy

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle DEC.$$

Skoro czworokąt $EACD$ jest równoległobokiem, to odcinki AC i ED są równoległe, skąd wiadomo, że

$$\sphericalangle DEC = \sphericalangle ACM.$$

Łącząc dwie powyższe równości, otrzymujemy tezę.

Uwaga
Gdy w zadaniu pojawia się środek odcinka, to dorysowanie takiego równoległoboku, aby ten punkt był przecięciem jego przekątnych, bardzo często przybliża nas do rozwiązania.

Zadania

1. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykaż, że czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem wtedy i tylko wtedy, gdy $MA = MC$ i $MB = MD$.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ wpisany w okrąg. Udowodnij, że jeśli $AD = BC$, to $ABCD$ jest trapezem równoramiennym.

3. Dany jest trapez $ABCD$, w którym odcinki AB i CD są podstawami. Wiadomo, że

$$AD = BC = 1, \quad AB = 4 \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ABC = 60°.$$

Wyznacz wszystkie możliwe długości odcinka CD.

4. Dany jest trójkąt ABC. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na bokach AB, BC i CA. Wiadomo, że następujące pary prostych są równoległe: KL oraz AC, LM oraz AB, a także KM i BC. Udowodnij, że punkt K jest środkiem boku AB.

5. Dany jest trójkąt ABC. Punkt M jest środkiem boku BC. Wykaż, że $AB + AC > 2AM$.

6. Dany jest trapez $ABCD$, którego boki mają długości: $AB = 4$, $BC = DA = \sqrt{2}$ oraz $CD = 2$. Wyznacz pole tego trapezu.

7. Dany jest czworokąt $ABCD$. Niech punkty K, L, M i N będą środkami odpowiednio boków AB, BC, CD i DA. Udowodnij, że prosta KM przechodzi przez środek odcinka LN.

8. (XI OMG, zawody II stopnia)
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na bokach AB i AD leżą odpowiednio takie punkty X i Y, różne od A, że $AD = DX$ oraz $AB = BY$. Udowodnij, że $CX = CY$.

9. (XIV OMJ, zawody I stopnia)
Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przekątnej BD wybrano taki punkt P, że spełniona jest równość $AP = BD$. Punkt Q jest środkiem odcinka CP. Wykaż, że $\measuredangle BQD = 90°$.

10. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, którego przeciwległe boki są równe i równoległe. Wykaż, że pole sześciokąta $ABCDEF$ jest dwukrotnie większe od pola trójkąta ACE.

2 Przekształcenia algebraiczne

Przy rozwiązywaniu poniższych zadań przydatna będzie znajomość zależności algebraicznych, zwanych wzorami skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Nie są to jednak wzory, które mają na celu jedynie przyspieszenie wymnażania dwóch nawiasów. Ważniejsza jest umiejętność „zwijania", czyli przekształcania już wymnożonych wyrażeń w iloczyn.

Przykład 1 (XIII OMJ, zawody I stopnia)
Dane są liczby dodatnie a, b, które spełniają równości

$$a + \frac{1}{b} = 5 \quad \text{oraz} \quad b + \frac{1}{a} = 7.$$

Wyznacz wartość wyrażenia $ab + \frac{1}{ab}$.

Rozwiązanie
Możemy zauważyć, że wyrażenie $ab + \frac{1}{ab}$ przypomina iloczyn dwóch danych równości.

$$5 \cdot 7 = \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) = ab + a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{ab} + 2,$$

a więc

$$ab + \frac{1}{ab} = 35 - 2 = 33.$$

Odpowiedź. Szukana wartość wynosi 33.

Przykład 2 (XII OMJ, zawody III stopnia)
Liczby rzeczywiste a, b i c są różne od zera i spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a^2+a=b^2 \\ b^2+b=c^2 \\ c^2+c=a^2. \end{cases}$$

Udowodnij, że $(a-b)(b-c)(c-a)=1$.

Rozwiązanie
Zauważmy, że a^2, b^2 i c^2 występują zarówno po lewych, jak i prawych stronach danych równości. Zatem, gdy dodamy te trzy nierówności stronami, to niektóre wyrażenia się skrócą. Mamy

$$(a^2+a)+(b^2+b)+(c^2+c)=a^2+b^2+c^2,$$

czyli po redukcji wyrażeń po obydwu stronach uzyskujemy

$$a+b+c=0.$$

Otrzymaliśmy ciekawą równość, jednak nie wystarcza ona do rozwiązania zadania. Musimy nieco przekształcić każde z początkowych równań. Na mocy pierwszej zależności dostajemy

$$a=b^2-a^2=(b-a)(b+a)=(b-a)\cdot(-c)=c(a-b),$$

przy czym przedostatnia równość wynika z tego, że $a+b+c=0$.

Rozumując analogicznie dla drugiego i trzeciego równania, mamy:

$$b=a(b-c),$$

$$c=b(c-a).$$

Wymnażając trzy otrzymane równania, dostajemy

$$abc=abc(a-b)(b-c)(c-a).$$

Dzielimy obie strony przez abc. Możemy to zrobić, gdyż z założenia liczby a, b i c są różne od zera. W rezultacie otrzymujemy

$$1=(a-b)(b-c)(c-a),$$

czego należało dowieść.

Zadania

1. Dane są liczby rzeczywiste x oraz y, które spełniają równości

$$x+y=11 \quad \text{oraz} \quad xy=7.$$

Wyznacz wartość wyrażenia x^2+y^2.

2. (XIII OMJ, zawody I stopnia)
Liczby a, b, c spełniają zależności

$$3a+4b=4c \quad \text{i} \quad 4a-3b=3c.$$

Wykaż, że $a^2+b^2=c^2$.

3. Dane są takie niezerowe liczby rzeczywiste a, b, że $a+b\neq 0$ oraz spełniona jest równość

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a+b}.$$

Udowodnij, że

$$\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}.$$

4. Dane są niezerowe liczby rzeczywiste a, b i c, dla których zachodzą równości

$$\frac{-a+b+c}{a}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{a+b-c}{c}.$$

Wyznacz wszystkie wartości, jakie może przyjąć wyrażenie

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}.$$

5. (X OMG, zawody II stopnia)
Dane są dodatnie liczby a,b,c,d spełniające warunki

$$a+c=b+d \quad \text{i} \quad ab=cd.$$

Wykaż, że $a=d$ i $b=c$.

6. Dane są takie liczby rzeczywiste a,b,c,d, że

$$2a-5b+2c-5d=4 \quad \text{i} \quad 3a+4b+3c+4d=6.$$

Znajdź wszystkie wartości, jakie może przyjmować wyrażenie

$$ab+bc+cd+da.$$

7. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1.$$
Wykaż, że
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}=0.$$

8. Dane są parami różne niezerowe liczby rzeczywiste a, b, c spełniające zależność
$$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}.$$
Udowodnij, że $|abc|=1$.

9. Udowodnij, że zachodzi równość:
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{99}{100}.$$

10. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c spełniające równości
$$a^2+b^2+c^2+abc=5 \quad \text{i} \quad a+b+c=3.$$
Wykaż, że co najmniej jedna z liczb a, b, c jest równa 2.

3 Zasada szufladkowa Dirichleta

„Co najmniej dwóch mieszkańców Warszawy ma dokładnie tyle samo włosów na głowie.” Skąd to wiadomo? Liczba ludzi żyjących w Warszawie przekracza milion, natomiast na głowie każdego człowieka znajduje się nie więcej niż 500 tysięcy włosów. Pewnych dwóch mieszkańców musi mieć zatem dokładnie tyle samo włosów.

Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeśli rozmieścimy n skarpetek w $n-1$ szufladkach, to do pewnej szufladki trafią przynajmniej dwie skarpetki.

Uogólniona zasada szufladkowa Dirichleta

Jeśli rozmieścimy n skarpetek w k szufladkach, to do pewnej szufladki trafi przynajmniej $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ skarpetek.

Uwaga

Symbol $\lceil x \rceil$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą nie mniejszą od liczby x. Na przykład $\lceil 1 \rceil = 1$, $\left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 2$, $\left\lceil \sqrt{5} \right\rceil = 3$ czy $\lceil \pi \rceil = 4$.

Przykład 1

Udowodnij, że dla dowolnych trzech liczb naturalnych a, b i c liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jest parzysta.

Rozwiązanie

Stwórzmy dwie szufladki – w jednej znajdą się liczby parzyste, a w drugiej liczby nieparzyste. Skarpetkami zostaną liczby a, b i c. Skoro są dwie szufladki, to pewne dwie liczby znajdują się w tej samej szufladce, czyli są tej samej parzystości. Różnica tych liczb oczywiście jest liczbą parzystą, zatem przynajmniej jedna z liczb

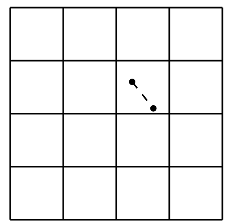
$$a-b, \quad b-c, \quad c-a$$

musi być parzysta. Stąd liczba $(a-b)(b-c)(c-a)$ jako wielokrotność liczby parzystej też jest parzysta.

Przykład 2

W kwadracie o boku 4 umieszczono 17 punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych punktów są odległe o nie więcej niż $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie



Podzielmy wyjściowy kwadrat na 16 jednostkowych kwadratów. Ponieważ jest 17 punktów, a jednostkowych kwadratów tylko 16, to w przynajmniej jednym jednostkowym kwadracie są przynajmniej dwa punkty. Ponieważ przekątna jednostkowego kwadratu na mocy twierdzenia Pitagorasa ma długość $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, to odległość tych dwóch punktów nie może być większa niż właśnie $\sqrt{2}$.

Zadania

1. Wykaż, że można spośród 13 osób wybrać takie dwie, które mają urodziny w tym samym miesiącu. Wykaż, że można spośród 64 osób wybrać takie trzy, które mają urodziny tego samego dnia miesiąca.

2. W szufladzie znajduje się po 10 skarpetek czerwonych, zielonych i niebieskich. Ile przynajmniej skarpetek musimy (losowo) wyjąć z szuflady, by mieć pewność, że pewne dwie są tego samego koloru?

3. Wybrano dziewięć różnych liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 16\}$. Wykaż, że suma pewnych dwóch wybranych liczb równa jest 17.

4. Każdy uczeń klasy otrzymał dwie niekoniecznie różne oceny z zakresu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wiedząc, że klasa ma 34 uczniów udowodnij, że można wybrać czterech uczniów o takiej samej średniej ocen.

5. W prostokącie o wymiarach 3×4 umieszczono 7 punktów. Wykaż, że pewne dwa z tych 7 punktów są odległe o nie więcej niż $\sqrt{5}$.

6. Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje na tej płaszczyźnie odcinek o długości 1, mający końce tego samego koloru.

7. (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Każdą z liczb

$$1, 2, 3, \ldots, 1000$$

pomalowano jednym z n kolorów. Okazało się, że każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami. Wyznacz najmniejszą liczbę n, dla której taka sytuacja jest możliwa.

8. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje jej niezerowa wielokrotność, której zapis w systemie dziesiętnym składa się jedynie z cyfr 0 i 9.

9. Dane są 82 liczby naturalne. Wykaż, że można spośród nich wybrać 10 takich liczb, które spełniają jeden z dwóch warunków:

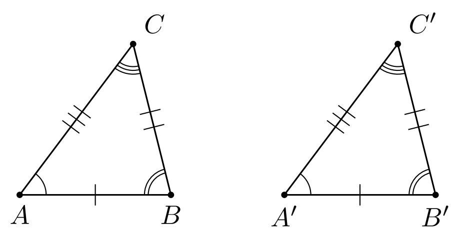
- różnica każdych dwóch z tych liczb jest podzielna przez 10,
- różnica każdych dwóch z tych liczb nie jest podzielna przez 10.

10. (V OMG, zawody III stopnia)
Dane są dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5. Wykaż, że spośród tych liczb można wybrać takie dwie liczby a_i, a_j, dla których

$$0 \leqslant \frac{1}{1+a_i} - \frac{1}{1+a_j} < \frac{1}{4}.$$

4 Przystawanie trójkątów

Przystawanie figur jest jednym z najbardziej podstawowych tematów w geometrii. Mimo swojej prostoty jest ono wyjątkowo użyteczne. Gdy warunkiem lub tezą jest równość odcinków, warto poszukać na rysunku trójkątów przystających o bokach w tych odcinkach. Często, w nieco trudniejszych zadaniach, kluczowe jest dorysowanie obiektów w taki sposób, żeby pojawiły się trójkąty przystające.



Trójkąty przystające

Mówimy, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzą jednocześnie następujące warunki:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CA = C'A'$$

oraz

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C',$$
$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A',$$
$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B',$$

co oznaczamy $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

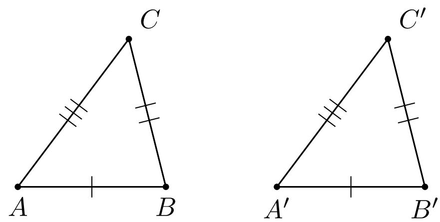
Aby uzasadnić, że pewne dwa trójkąty są przystające, nie trzeba sprawdzać wszystkich sześciu wymienionych wyżej równości. Wystarczy stwierdzić, że mają miejsce pewne konkretne trzy z nich. Takie trójki warunków nazywamy cechami przystawania trójkątów.

Cechy przystawania trójkątów

Trójkąty ABC oraz $A'B'C'$ są przystające, jeśli zachodzi dowolny z wymienionych niżej zestawów trzech warunków.

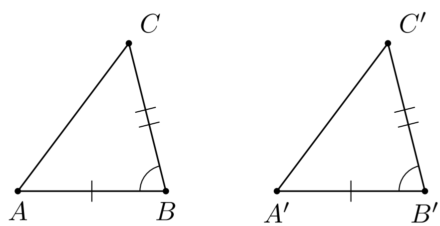
- Cecha bok–bok–bok

$$AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad \text{i} \quad CA = C'A'$$



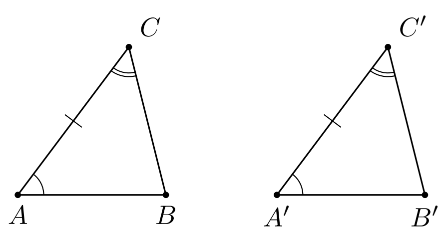
- Cecha bok–kąt–bok

$$AB = A'B', \quad \sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C' \quad \text{i} \quad BC = B'C'$$



- Cecha kąt–bok–kąt

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle C'A'B', \ AC = A'C' \ \text{i} \ \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'$$



Uwaga

Rozwiązując zadania z geometrii warto jest zaznaczać tym samym kolorem odcinki tej samej długości lub kąty tej samej miary. Może to pomóc zidentyfikować ewentualne pary trójkątów przystających.

Przykład 1

Na bokach AB i BC prostokąta $ABCD$ zbudowano, po jego wewnętrznej stronie, trójkąty równoboczne ABE i BCF. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

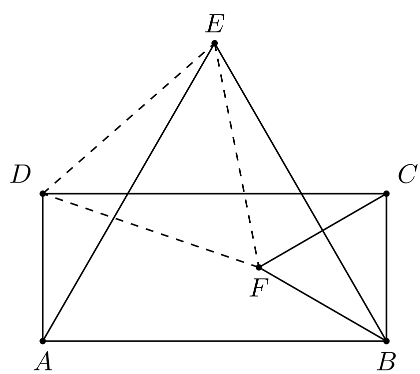
Rozwiązanie

Na rysunku nie brakuje par równych odcinków i kątów. Tezę zadania można sformułować jako $DE = EF = FD$, więc naturalne jest szukanie trójkątów przystających. Rozważmy trójkąty: DAE, FBE i FCD. Zauważmy, że skoro trójkąt ABE jest równoboczny oraz czworokąt $ABCD$ jest prostokątem, to zachodzą równości

$$CD = BE = AE = AB.$$

Pierwsze dwie równości dotyczą boków wskazanych trójkątów. Prowadząc analogiczne rozumowanie dla trójkąta BCF dostajemy

$$AD = BF = CF = BC.$$



Aby wykazać postulowane przystawania trójkątów zauważmy, że

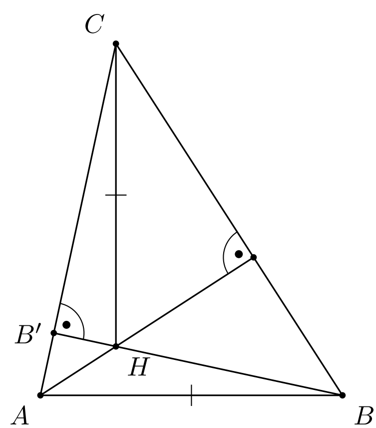
$$\begin{aligned}
&\sphericalangle DAE = \sphericalangle DAB - \sphericalangle EAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,\\
&\sphericalangle FBE = \sphericalangle ABE + \sphericalangle FBC - \sphericalangle ABC = 60^\circ + 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ,\\
&\sphericalangle FCD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.
\end{aligned}$$

Skoro $AE = BE = CD$, to na mocy trzykrotnie użytej cechy bok–kąt–bok stwierdzamy, że $\triangle DAE \equiv \triangle FBE \equiv \triangle FCD$, i w konsekwencji $DE = EF = FD$. Stąd trójkąt DEF jest równoboczny.

Przykład 2 (I OMG, zawody II stopnia)
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, że $\sphericalangle ACB = 45°$. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie H. Wykaż, że $CH = AB$.

Rozwiązanie

Wprowadzimy do rozwiązania nowy punkt – spodek wysokości BH opuszczonej na bok AC trójkąta ABC, który to punkt oznaczamy przez B'.



Zauważamy, że

$$\sphericalangle B'CH = 90° - \sphericalangle BAC = \sphericalangle B'BA.$$

Skoro $\sphericalangle B'CB = 45°$ i $\sphericalangle CB'B = 90°$, to

$$\sphericalangle CBB' = 45°.$$

Stąd trójkąt $BB'C$ jest równoramienny, czyli $B'C = B'B$.

Łącząc zależności

$$\sphericalangle B'CH = \sphericalangle B'BA, \quad B'C = B'B \quad \text{i} \quad \sphericalangle CB'H = \sphericalangle BB'A = 90°,$$

wnioskujemy, na mocy cechy kąt-bok-kąt, że trójkąty $CB'H$ i $BB'A$ są przystające. W konsekwencji dostajemy $CH = AB$.

Zadania

1. Załóżmy, że zachodzą równości:

$$AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A'.$$

Czy wynika z tego, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające?

Uwaga

Zauważ, że dane równości są nieco inne niż te podane we wstępie jako warunek na przystawanie trójkątów. Mianowicie równy kąt nie znajduje się między równymi odcinkami.

2. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąty przy wierzchołkach A i B są ostre. Punkty D, S i H określone są odpowiednio jako: spodek dwusiecznej, spodek środkowej i spodek wysokości opuszczonych z wierzchołka C na podstawę AB. Udowodnij, że jeśli $D = H$ lub $H = S$, lub $S = D$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

3. Dany jest trójkąt ABC oraz takie punkty X, Y znajdujące się odpowiednio na bokach AC i BC, że zachodzi równość $AX = BY$. Niech P będzie punktem przecięcia symetralnych odcinków AB i XY. Wykaż, że $\sphericalangle CAP = \sphericalangle CBP$.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, spełniający warunek $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC$. Symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie M, leżącym na odcinku AB. Udowodnij, że $AC = BD$.

5. W trójkącie ABC zachodzi równość $AC = BC$. Punkty X, Y leżą odpowiednio na bokach AC i BC, przy czym $AX = CY$. Oznaczmy przez P i Q rzuty prostokątne punktów X oraz Y na odcinek AB. Udowodnij, że $PQ = \frac{1}{2}AB$.

6. (XI OMG, zawody I stopnia)

Wewnątrz kwadratu $ABCD$ wybrano taki punkt P, że

$$AP = AB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CPD = 90^\circ.$$

Wykaż, że $DP = 2 \cdot CP$.

7. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

8. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie K, zaś symetralne odcinków AD i BC przecinają się w punkcie L, przy czym punkty K i L leżą wewnątrz czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że jeżeli $\sphericalangle AKB = \sphericalangle CKD$, to

$$\sphericalangle ALD = \sphericalangle BLC.$$

9. (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta równobocznego ABC. Punkty D i E leżą odpowiednio na odcinkach AC i BC, przy czym zachodzi warunek $\sphericalangle DME = 60°$. Udowodnij, że

$$AD + BE = DE + \frac{1}{2}AB.$$

10. (V CPSJ)
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AB < AC < BC$. Na odcinkach AC i BC wybrano odpowiednio takie punkty K i L, że $AB = CK = CL$. Symetralne odcinków AK i BL przecinają prostą AB odpowiednio w punktach P i Q. Odcinki KP i LQ przecinają się w punkcie M. Wykaż, że

$$AK + KM = BL + LM.$$

5 Podzielności

Podzielności są punktem wyjścia zagadnień poruszanych w teorii liczb. Jest to uniwersalne narzędzie przydatne w rozwiązywaniu takich problemów, jak choćby równania w liczbach całkowitych.

Definicja

Dane są liczby całkowite n i d. Powiemy, że liczba d *dzieli* n, jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że $n = kd$. Taką podzielność oznaczamy $d \mid n$.

Jeżeli $d \mid n$, to mówimy, że d *dzieli* n, d *jest dzielnikiem* n, n *jest wielokrotnością* d lub n *jest podzielna przez* d.

Z tej definicji wynika, że liczba 0 jest podzielna przez każdą liczbę całkowitą. Przypomnijmy, że 0 nie zaliczamy do liczb złożonych.

Poniżej przedstawiamy podstawowe własności podzielności, które zachodzą dla dowolnych liczb całkowitych.

Własności

1. Jeśli $d \mid a$, to $d \mid a - kd$.
2. Jeśli $d \mid a$ oraz $d \mid b$, to $d \mid a + b$ oraz $d^2 \mid ab$.
3. Jeśli $k \mid a$ oraz $l \mid b$, to $kl \mid ab$.
4. Jeśli $ak \mid bk$ oraz $k \neq 0$, to wówczas $a \mid b$.
5. Jeśli $a \mid b$ oraz $b \mid c$, to $a \mid c$.
6. Jeśli $p \mid ab$ dla pewnej liczby pierwszej p, to $p \mid a$ lub $p \mid b$.
7. Jeśli $a \mid b$ oraz $b \neq 0$, to $|a| \leqslant |b|$.

Przykład 1
Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, że

$$n+2 \,\Big|\, 3n+21.$$

Rozwiązanie
Na mocy własności 1, skoro $n+2 \,\Big|\, 3n+21$, to prawdziwa jest również podzielność

$$n+2 \,\Big|\, (3n+21)-3(n+2) = 3n+21-3n-6 = 15.$$

Pozostało nam znaleźć takie liczby n, dla których $n+2$ jest dzielnikiem liczby 15. Ponieważ $n+2 > 2$, to $n+2$ jest jedną z liczb $3, 5, 15$ i w konsekwencji liczba n równa jest $1, 3$ lub 13.

Przykład 2 (XI OMG, zawody III stopnia)
Dane są takie dodatnie liczby całkowite m i n, że liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$. Wykaż, że liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$.

Rozwiązanie
Warto przekształcić warunek i tezę zadania w taki sposób, aby wyeliminować liczbę m z prawych stron podzielności. Korzystając z własności 1, liczba $m+n^2$ jest podzielna przez $m+n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m+n \,\Big|\, (m+n^2)-(m+n) = n^2-n,$$

a liczba $m+n^3$ jest podzielna przez $m+n$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$m+n \,\Big|\, (m+n^3)-(m+n) = n^3-n.$$

Otrzymane wyrażenia możemy rozłożyć na czynniki:

$$n^2-n = n(n-1) \quad \text{i} \quad n^3-n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1).$$

Zatem $(n^2-n)\cdot(n+1) = n^3-n$, skąd płynie wniosek, że

$$n^2-n \,\Big|\, n^3-n.$$

Ponieważ zachodzą podzielności

$$m+n \,\Big|\, n^2-n \quad \text{i} \quad n^2-n \,\Big|\, n^3-n,$$

to na podstawie własności 4, mamy również $m+n \,\Big|\, n^3-n$. Lecz na początku rozwiązania doszliśmy do wniosku, że otrzymany warunek jest równoważny temu, że $m+n \,\Big|\, m+n^3$, czego należało dowieść.

Zadania

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi podzielność $6 \,\Big|\, n(n+1)(2n+1)$.

2. Znajdź wszystkie takie dodatnie liczby całkowite a, b, że liczba $a+b$ jest podzielna przez ab.

3. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi podzielność $4 \,\Big|\, n^4-n^2$.

4. Znajdź wszystkie takie liczby całkowite n, że $n+1 \,\Big|\, n^2+1$.

5. Znajdź wszystkie liczby postaci $\overline{abcab}$ podzielne przez 11, gdzie a, b, c to cyfry i $a \neq 0$.

Uwaga

Przez $\overline{xyz}$ oznaczamy liczbę o cyfrach x, y i z w zapisie dziesiętnym.

6. (VII OMG, zawody II stopnia)

Wyznacz wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych a, b, których iloczyn ab jest podzielny przez 175, a suma $a+b$ jest równa 175.

7. Dane są dodatnie liczby całkowite a i b. Wiadomo, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi podzielność $a+k \,\Big|\, b+k$. Wykaż, że $a=b$.

8. (XII OMJ, zawody I stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że liczba $a+b+1$ jest dzielnikiem pierwszym liczby $4ab-1$. Udowodnij, że $a=b$.

9. Wykaż, że nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite m, n oraz k, że zachodzi równość $(2m+n)(3m+2n)=2^k$.

10. Znajdź wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b), że zachodzi podzielność $ab \,\Big|\, a^2+b$.

6 Grafy

Podstawowe pojęcia

Graf opisuje zbiór obiektów, pomiędzy którymi są pewnego typu połączenia. Nie interesuje nas dokładnie, gdzie jak położone są te obiekty, jakie są między nimi odległości albo czy łączące je odcinki się przecinają. Interesuje nas to, które pary obiektów są połączone i jak opisać układ tych połączeń.

W teorii grafów owe „obiekty" nazywamy *wierzchołkami*, a „połączenia" między nimi – *krawędziami*. Wierzchołki, które łączy krawędź nazywamy jej *końcami*. Przez *stopień wierzchołka* rozumiemy liczbę krawędzi o końcu w danym wierzchołku. *Ścieżką* nazywamy ciąg krawędzi, z których każde dwie kolejne mają wspólny koniec.

Grafy są przydatne w zadaniach, w których mowa jest o punktach połączonych odcinkami, wierzchołkach połączonych krawędziami, gościach na przyjęciu, spośród których niektórzy się znają, czy też turnieju, gdzie zawodnicy rozgrywają mecze.

Lemat o uściskach dłoni

Suma stopni wszystkich wierzchołków grafu jest równa podwojonej liczbie jego krawędzi.

Dowód

Zauważmy, że usuwając dowolną krawędź, zmniejszamy stopień każdego z jej wierzchołków o 1. Wobec tego usunięcie jednej krawędzi zmniejsza sumę wszystkich stopni o dokładnie 2. Usuwając więc wszystkie krawędzie zmniejszymy sumę stopni o dwukrotność liczby krawędzi. Pozostaje tylko zauważyć, że wówczas stopień każdego wierzchołka będzie równy 0, a więc ich suma też będzie równa 0. Stąd początkowa suma stopni musiała być dwukrotnością liczby wszystkich krawędzi.

W alternatywnej wersji to twierdzenie mówi o przyjęciu, na którym niektórzy goście uścisnęli sobie dłonie. Wówczas możemy powiedzieć, że gdyby każda osoba policzyła, ile osób podało jej rękę, to suma otrzymanych liczb byłaby podwojoną liczbą wszystkich uścisków. W szczególności ta liczba byłaby parzysta.

Uwaga
W zadaniach o znajomościach, przyjaźniach itp. zakładamy, że jeśli osoba A zna osobę B, to osoba B z osobą A również.

Przykład 1

Rozstrzygnij, czy istnieje graf o siedmiu wierzchołkach, w którym każdy wierzchołek ma stopień 5.

Rozwiązanie

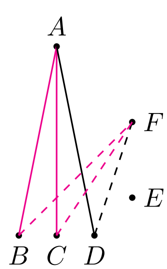
Wykażemy, że nie jest to możliwe. Załóżmy nie wprost, że istnieje graf opisany w treści zadania.

Niech K będzie liczbą krawędzi w tym grafie. Ponieważ jest siedem wierzchołków, a w każdym schodzi się dokładnie pięć krawędzi, to na mocy lematu o uściskach dłoni wnioskujemy, że $5 \cdot 7 = 2K$, co jest niemożliwe, gdyż 35 jest liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że graf spełniający warunki zadania nie istnieje.

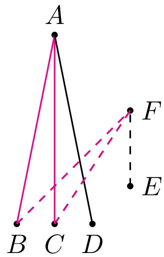
Przykład 2 (V OMG, zawody II stopnia)

Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

Rozwiązanie



Niech A będzie pewnym uczestnikiem przyjęcia, a B, C, D jego trzema znajomymi. E i F to pozostali goście, którzy nie znają A. Wobec tego, jeśli osoby E i F się znają, to F musi znać dwie osoby spośród B, C, D; natomiast jeśli E i F się nie znają, to F zna wszystkie osoby spośród B, C, D.



Bez straty ogólności możemy więc przyjąć, że znajomymi F są B i C. Jeżeli A, B, F, C usiądą wokół okrągłego stołu w tej właśnie kolejności, to każda z nich będzie siedziała między swoimi dwoma znajomymi.

Zadania

1. Wykaż, że w każdym grafie liczba wierzchołków o stopniach nieparzystych jest parzysta.

2. Na przyjęciu spotkało się 19 osób. Każda z tych osób ma wśród pozostałych co najmniej 10 znajomych. Udowodnij, że można wskazać taką trójkę osób, wśród których każde dwie się znają.

3. Wykaż, że każdy wielościan wypukły ma parzystą liczbę ścian mających nieparzystą liczbę boków.

4. W pewnej grupie 200 osób, niektórzy się znają, a niektórzy się nie znają. Rozstrzygnij, czy jest możliwe, aby każda z tych osób znała dokładnie 7 osób spośród pozostałych.

5. Wykaż, że wśród sześciu osób na przyjęciu istnieje trójka, w której wszyscy się znają lub trójka, w której wszyscy się nie znają.

6. (IV OMG, zawody II stopnia)
W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

7. W pewnym kraju znajduje się 101 miast, przy czym na północy znajduje się 50, a na południu – 51 miast. Każde z miast na południu jest połączone z każdym miastem na północy dwukierunkową drogą. Wiadomo też, że żadne dwa miasta na południu, ani żadne dwa miasta na północy nie są połączone drogą. Zakładamy, że drogi są jedynym sposobem, aby przemieścić się między miastami. Rozstrzygnij, czy można tak odbyć podróż drogami tego kraju, aby każdą drogą przejechać dokładnie raz.

8. (I OMG, zawody III stopnia)
W przestrzeni danych jest takich n punktów ($n \geqslant 4$), że żadne cztery nie leżą na jednej płaszczyźnie. Każde dwa z tych punktów połączono odcinkiem niebieskim lub czerwonym. Udowodnij, że można tak wybrać jeden z tych kolorów, aby każde dwa punkty były połączone odcinkiem lub łamaną wybranego koloru.

9. Dany jest graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 20. Udowodnij, że można podpisać wierzchołki liczbami od 1 do 21, aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie były podpisane tą samą liczbą.

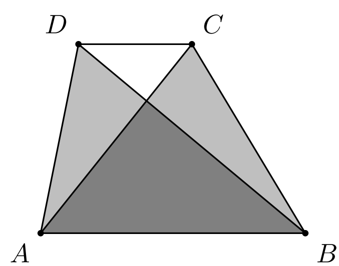
10. Zbiór $2n+1$ osób, dla pewnej liczby całkowitej $n \geqslant 1$, spełnia następujący warunek: dla każdej grupy n z tych osób, ktoś spośród pozostałych $n+1$ osób zna je wszystkie. Wykaż, że istnieje osoba, która zna wszystkie pozostałe.

7 Pola

Własności pól figur są bardzo pomocne choćby wtedy, gdy dane są w zadaniu zależności między długościami pewnych odcinków. Poniżej przedstawiamy kilka kluczowych faktów związanych z polami.

Uwaga
Pole figury $\mathcal{F}$ będziemy oznaczać poprzez $[\mathcal{F}]$.

Twierdzenie 1
W czworokącie wypukłym $ABCD$ boki AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $[ABC] = [ABD]$.



Dowód
Oznaczmy wysokości trójkątów ABC i ABD opuszczone na bok AB odpowiednio jako h_c i h_d. Wiemy, że zachodzą równości

$$[ABC] = \frac{1}{2}AB \cdot h_c,$$

$$[ABD] = \frac{1}{2}AB \cdot h_d.$$

Stąd równość $[ABC] = [ABD]$ jest równoważna równości $h_c = h_d$. Z kolei równość $h_c = h_d$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy odległości punktów C i D od prostej AB są równe, co w połączeniu z założeniem, że czworokąt $ABCD$ jest wypukły, jest równoważne temu, że proste AB i CD są równoległe.

Twierdzenie 2

Jeśli różne punkty A, B, C leżą w dowolnej kolejności na prostej k, a punkt X leży poza tą prostą, to prawdziwa jest następująca zależność:

$$\frac{[ACX]}{[BCX]} = \frac{AC}{BC}.$$

Dowód

Zauważmy, że trójkąty ACX i BCX mają wspólną wysokość opuszczoną z wierzchołka X. Oznaczmy jej długość jako h. Wówczas zachodzi równość

$$\frac{[ACX]}{[BCX]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot h} = \frac{AC}{BC}.$$

Przykład 1

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, którego przekątne przecinają się w punkcie E. Wiadomo, że zachodzą równości:

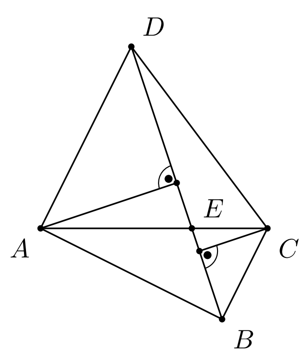
$$[ABE] = 3, \quad [BCE] = 2 \quad \text{i} \quad [CDE] = 6,$$

Oblicz pole trójkąta DAE.

Rozwiązanie

Zauważamy, że trójkąty EDC i EBC mają wspólną wysokość opuszczoną na prostą BD. Rozpatrzmy stosunek pól tych trójkątów i skorzystajmy z Twierdzenia 2. Otrzymujemy wówczas równość

$$\frac{ED}{EB} = \frac{[EDC]}{[EBC]} = \frac{6}{2} = 3.$$



Analogicznie wyznaczamy stosunek pól trójkątów EDA i EBA:

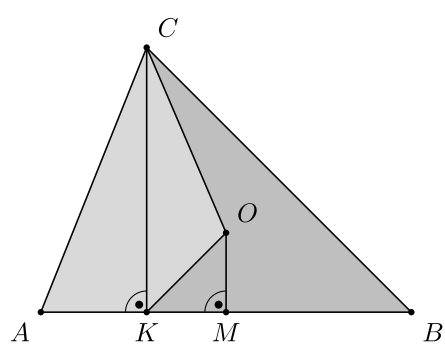
$$\frac{ED}{EB} = \frac{[EDA]}{[EBA]} = \frac{[EDA]}{3}.$$

Łącząc powyższe dwa równania otrzymujemy, że $\frac{[EDA]}{3} = 3$, zatem ostatecznie $[EDA] = 9$.

Odpowiedź. Pole trójkąta DAE wynosi 9.

Przykład 2 (XII OMJ, zawody II stopnia)
Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, w którym $AC \neq BC$. Punkt K jest spodkiem wysokości tego trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Udowodnij, że pola czworokątów $AKOC$ oraz $BKOC$ są równe.

Rozwiązanie
Bez straty ogólności przyjmijmy, że $AC < BC$. Oznaczmy przez M środek odcinka AB. Skoro O jest środkiem okręgu, którego odcinek AB jest cięciwą, to prosta OM jest symetralną odcinka AB, czyli jest do niego prostopadła. Wiemy też, że prosta CK również jest prostopadła do prostej AB, gdyż jest wysokością trójkąta ABC opuszczoną na bok AB. Stąd odcinki CK i OM są równoległe. Na mocy Twierdzenia 1 zachodzi więc równość $[CKO] = [CKM]$.



Czworokąt $AKOC$ jest wypukły, wobec czego

$$[AKOC] = [AKC] + [CKO] = [AKC] + [CKM] = \\ = [ACM].$$

Skoro punkt M jest środkiem boku AB, to na mocy Twierdzenia 2 zachodzi równość
$$[ACM] = \frac{1}{2}[ABC].$$
W konsekwencji
$$[BKOC] = [ABC] - [AKOC] = [ABC] - \frac{1}{2}[ABC] = \frac{1}{2}[ABC],$$
czyli $[AKOC] = [BKOC]$, co było do udowodnienia.

Zadania

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Proste AC i BD przecinają się w punkcie E. Udowodnij, że $[ADE] = [BCE]$.

2. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym przekątna AD jest równoległa do boku BC, a przekątna CE jest równoległa do boku AB. Wykaż, że pola trójkątów ABE i BCD są równe.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym kąt przy wierzchołku B jest prosty. Punkt E jest takim punktem odcinka BC, że odcinki AE i CD są równoległe. Wiedząc, że $AB = 10$ oraz $BC = 5$, oblicz pole czworokąta $ABED$.

4. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt P w jego wnętrzu. Punkty D, E i F są rzutami prostokątnymi punktu P na odcinki BC, CA i AB. Udowodnij, że wartość wyrażenia
$$PD + PE + PF$$
nie zależy od wyboru punktu P.

5. (IX OMG, zawody II stopnia)
W trapezie $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami podstaw AB i CD. Punkt P leży na odcinku MN. Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.

6. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt X w jego wnętrzu. Punkt C' jest przecięciem prostej AB z prostą CX. Wykaż, że zachodzi równość
$$\frac{[ACX]}{[BCX]} = \frac{AC'}{BC'}.$$

7. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkt E leży na boku AB, a punkt F leży na boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P oraz przecina prostą CD w punkcie Q. Udowodnij, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

8. (XII OMJ, zawody III stopnia)
Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Punkt E leży na odcinku CD. Wykaż, że jeżeli suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa połowie pola trójkąta ABC, to punkt D jest środkiem boku AB lub punkt E jest środkiem odcinka CD.

9. Dany jest trójkąt ABC, w którym kąt przy wierzchołku B jest prosty. Okrąg o środku w punkcie A i promieniu AB przecina odcinek AC w punkcie D. Udowodnij, że długość łuku BD tego okręgu jest krótsza od długości odcinka BC.

10. Wykaż, że jeśli pewne cztery środkowe pięciokąta przecinają się w jednym punkcie, to piąta środkowa również przechodzi przez ten punkt.

Uwaga
Środkową pięciokąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek pięciokąta ze środkiem przeciwległego boku. Dla przykładu, środkowe pięciokąta $ABCDE$ to odcinki AP, BQ, CR, DS, ET, gdzie punkty P, Q, R, S, T są odpowiednio środkami boków CD, DE, EA, AB, BC.

8 Liczby całkowite i wymierne

Operowanie na liczbach całkowitych i wymiernych jest nieco inną sztuką niż działanie na liczbach rzeczywistych. Same przekształcenia algebraiczne mogą nie wystarczyć. Konieczna może być analiza podzielności, pierwszości czy wymierności pewnych liczb.

Definicje

Dodatnią liczbę całkowitą $p \geqslant 2$, która ma dwa dzielniki naturalne: jedynkę i siebie samą, nazywamy liczbą *pierwszą*.

Wobec powyższej definicji jedynymi przedstawieniami liczby pierwszej p w postaci iloczynu dwóch liczb całkowitych są

$$p = 1 \cdot p = p \cdot 1 = (-1) \cdot (-p) = (-p) \cdot (-1).$$

Liczbę rzeczywistą nazywamy *wymierną*, jeśli można ją przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p, q są liczbami całkowitymi oraz $q \neq 0$.

Twierdzenie

Dane są liczby wymierne a oraz $b \neq 0$. Wówczas liczby ab, $\frac{a}{b}$, $a+b$ oraz $a-b$ są wymierne.

Dowód

Skoro liczby a i b są wymierne, to istnieją takie liczby całkowite p, q, r, s, że

$$a = \frac{p}{q} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{r}{s}.$$

Wynika stąd, że liczby $a+b$ oraz $a \cdot b$ są wymierne. Oto ich przedstawienie w postaci ułamków o całkowitym liczniku i mianowniku:

$$a+b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}, \quad ab = \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

Zauważmy, że $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ oraz $a+b = a+(-b)$. Oczywiście liczby $-a$ oraz $\frac{1}{b}$ są wymierne, zatem również liczby $a-b$ oraz $\frac{a}{b}$ są wymierne.

Przykład 1 (XII OMJ, zawody I stopnia)
Liczby wymierne a, b, c spełniają równanie

$$(a+b+c)(a+b-c) = c^2.$$

Wykaż, że $a+b = c = 0$.

Rozwiązanie
Przedstawiamy lewą stronę założenia jako różnicę kwadratów

$$(a+b+c)(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2,$$

Skoro jednak wyrażenie wyżej jest z założenia równe c^2, to mamy

$$(a+b)^2 = 2c^2.$$

Załóżmy nie wprost, że $c \neq 0$. Dzieląc stronami przez c^2, otrzymujemy

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^2 = 2,$$

Obydwie strony równości wyżej są dodatnie, więc możemy wyciągnąć z nich pierwiastki, uzyskując

$$\left|\frac{a+b}{c}\right| = \sqrt{2}.$$

Zauważmy, że liczba $a+b$, jako suma liczb wymiernych, jest wymierna. Podobnie liczba $\frac{a+b}{c}$, jako iloraz liczb wymiernych, również jest wymierna. W konsekwencji lewa strona równości jest wymierna. Zaś jej prawa strona, mianowicie liczba $\sqrt{2}$, wymierna nie jest.

Otrzymaliśmy sprzeczność, co oznacza, że $c = 0$, a zatem wobec $(a+b)^2 = 2c^2$, uzyskujemy $a+b = 0$.

Przykład 2

Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite a, b, dla których

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2017}$$

Rozwiązanie

Wymnóżmy więc obie strony przez $2017ab$. Wówczas otrzymujemy

$$2017a+2017b=ab.$$

Przekształcamy tę równość równoważnie, aby po jednej stronie otrzymać postać iloczynową:

$$\begin{aligned} 2017a+2017b&=ab\\ 2017^2+2017a+2017b&=ab+2017^2\\ 2017^2&=ab-2017a-2017b+2017^2\\ 2017^2&=(a-2017)(b-2017). \end{aligned}$$

Wykażemy, że liczby $a-2017$ oraz $b-2017$ są nieujemne. Gdyby bowiem $a<2017$, to $\frac{1}{a}>\frac{1}{2017}$, więc

$$\frac{1}{2017}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2017}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2017},$$

skąd otrzymujemy sprzeczność. Podobnie uzasadniamy, że $b\geqslant 2017$.

Liczba 2017 jest pierwsza, więc jedynymi dzielnikami liczby 2017^2 są 1, 2017 oraz 2017^2. Wobec tego jedynymi sposobami przedstawienia liczby 2017^2 w postaci iloczynu dodatnich liczb całkowitych są:

$$1\cdot 2017^2=2017\cdot 2017=2017^2\cdot 1.$$

Z powyższego wynika, że liczby $a-2017$ oraz $b-2017$ obie są równe 2017, lub jedna z nich jest równa 1, zaś druga 2017^2. Oznacza to, że pary liczb (a,b) równe

$$(4034,4034),\quad (2017^2+2017,2018),\quad (2018,2017^2+2017)$$

są jedynymi rozwiązaniami wyjściowego równania.

Uwaga 1
W powyższym przykładzie kluczowe okazało się odpowiednie przekształcenie równości, aby doprowadzić jedną ze stron do postaci iloczynowej. Zasadnym więc wydaje się pytanie, czy jest jakaś prosta metoda, która pozwala stwierdzić w jaki sposób należy przekształcać równość, aby otrzymać przyjazną formę. Niestety taką metodę trudno wskazać. Kluczowe jest doświadczenie i umiejętność dostrzegania wzorów, których zdobycie możliwe jest jedynie poprzez regularne rozwiązywanie zadań.

Uwaga 2
Niezwykle ważną częścią rozwiązania jest zauważenie, że 2017 jest liczbą pierwszą. Jeśli na zawodach matematycznych chcemy sprawdzić, czy liczba n jest liczbą pierwszą, wystarczy przeanalizować czy nie jest podzielna przez liczbę pierwszą nie większą niż $\sqrt{n}$. Gdyby bowiem n była liczbą złożoną, to musiałaby dać się przedstawić w postaci $n = ab$, dla pewnych liczb całkowitych $a \geqslant b > 1$. Wówczas zachodzi nierówność $n = ab \geqslant b^2$, czyli $\sqrt{n} \geqslant b$ oraz b jest dzielnikiem liczby n.

Zadania

1. Dana jest taka liczba rzeczywista $x \neq 0$, że liczba $x + \frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą. Udowodnij, że liczba $x^2 + \frac{1}{x^2}$ również jest liczbą całkowitą.

2. (I OMG, zawody III stopnia)
Ile jest czwórek (a,b,c,d) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$ab + bc + cd + da = 55?$$

Odpowiedź uzasadnij.

3. (VIII OMG, zawody III stopnia)
Liczby całkowite spełniają warunek $a+b+c = bc$. Udowodnij, że liczba $(a+b)(a+c)$ jest podzielna przez 4.

4. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że liczba $p + 400$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. (XV OMJ, zawody II stopnia)
Dane są liczby rzeczywiste a, b, c. Wiadomo, że liczby $a+b$, $b+c$, $c+a$ są trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności, przy czym najmniejsza z nich jest nieparzysta. Wykaż, że liczby a, b, c są także trzema kolejnymi liczbami całkowitymi, wypisanymi w pewnej kolejności.

6. Wyznacz wszystkie pary (x,y) liczb całkowitych spełniające równanie

$$xy = 2x + 3y + 5.$$

7. Dane są takie dodatnie liczby rzeczywiste a i b, że liczby a^2+b^2 oraz ab są wymierne. Udowodnij, że liczba $(a^2-b^2)^2$ również jest wymierna.

8. Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych a oraz b liczbę $2a^2+2b^2$ można przedstawić jako sumę dwóch kwadratów liczb całkowitych.

9. (XI OMG, zawody III stopnia)
Dane są liczby całkowite a, b, c, dla których liczba

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{b+c\sqrt{2}}$$

jest wymierna. Wykazać, że liczba $ab+bc+ca$ jest podzielna przez liczbę $a+b+c$.

10. Rozstrzygnij czy istnieją takie liczby dodatnie x, y, że liczby xy oraz $x+y$ są całkowite, ale żadna z liczb x, y nie jest całkowita.

11. Udowodnij, że każdą liczbę wymierną można zapisać w postaci $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$, gdzie a,b,c,d są takimi niezerowymi liczbami całkowitymi, że $a+b=c+d$.

12. Znajdź wszystkie liczby całkowite a,b, dla których zachodzi równość

$$a^2 - a = b^2 - 5b + 4.$$

9 Plansze

Jeśli położymy domino 2×1 na szachownicy, to przykryje ono jedno białe i jedno czarne pole. Taka, i podobne obserwacje, pozwalają udowodnić, że pewnego typu plansz nie można pokryć pewnego rodzaju klockami. Kluczowym elementem rozumowania jest w tego typu zadaniach wprowadzenie pomysłowego kolorowania. Nierzadko nie jest już ono tak regularne, jak w zwykłej szachownicy. Niekiedy rolę „kolorów” pełnią odpowiednio dobrane liczby.

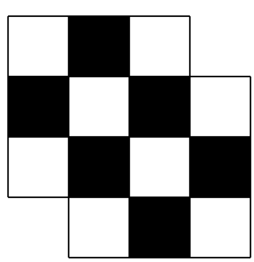
Przykład 1

Z kwadratowej planszy 4×4 usunięto dwa przeciwległe narożniki, otrzymując planszę z czternastoma polami. Czy tak zmodyfikowaną planszę można wypełnić siedmioma prostokątami o wymiarach 2×1?

Uwaga Prostokąty można obracać o $90°$.

Rozwiązanie

Pokolorujmy daną planszę tak, aby otrzymać biało-czarną szachownicę (tak jak na rysunku). Wówczas jest na niej 8 pól białych i 6 pól czarnych.



Zauważmy, że każdy prostokąt 2×1 pokrywa dokładnie po jednym polu każdego koloru. Gdyby więc wszystkie pola zostały pokryte prostokątami, znaczyło by to, że pól białych jest tyle samo co czarnych. Tak jednak nie jest, a więc szukane pokrycie nie istnieje.

Przykład 2

Kwadratową planszę o wymiarach $n \times n$ pokryto kwadratami o wymiarach 3×3 i 2×2. Udowodnij, że tę samą planszę można pokryć tylko kwadratami 3×3 lub tylko kwadratami 2×2.

Rozwiązanie

W rozwiązaniu nie będziemy kolorować pól, tylko wpiszemy w każde z nich pewną liczbę. Ponumerujmy kolumny tablicy liczbami od 1 do n. W pola leżące w kolumnach o numerach nieparzystych wpiszmy -1, zaś w pola leżące w kolumnach o numerach parzystych: 1.

$$\begin{array}{|c|c|c|c}
\hline
-1 & 1 & -1 & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & \cdots \\
\hline
-1 & 1 & -1 & \\
\hline
 & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Przeanalizujmy sumę liczb, które są przykryte przez dane w zadaniu klocki. Liczby przykrywane przez dowolny kwadrat 2×2 mają sumę równą 0. Natomiast suma liczb przykrywanych przez kwadrat 3×3 może być równa jedynie -3 lub 3. Warto poszukać cech wspólnych tych liczb. Zauważmy, że każda z nich jest podzielna przez 3.

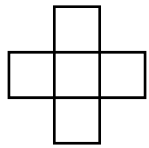
Skoro dane kwadraty pokrywają całą tablicę, to suma liczb wpisanych w pola całej tablicy również jest podzielna przez 3.

Jeżeli n jest liczbą parzystą, możemy wypełnić tablicę używając jedynie kwadratów 2×2.

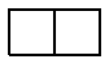
Pozostaje tylko rozpatrzyć przypadek, gdy n jest liczbą nieparzystą. Wówczas suma liczb wpisanych w kolumnę o numerze nieparzystym i kolumnę o numerze parzystym po jej prawej stronie wynosi 0. Stąd suma liczb z pierwszych $n-1$ kolumn wynosi 0. Pozostała nam jedynie ostatnia kolumna o numerze n, dla której suma wpisanych w nią liczb wynosi oczywiście $-n$. Skoro suma liczb na całej planszy wynosi $-n$, a wykazaliśmy, że ta suma musi być podzielna przez 3, to zachodzi podzielność $3 \mid n$. Oznacza to, że tablicę $n \times n$ można wypełnić tylko kwadratami 3×3.

Zadania

1. Mamy do dyspozycji 11 klocków, a dokładniej: jeden klocek składający się z jednego kwadratu środkowego oraz czterech kwadratów sąsiednich postaci



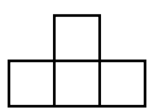
oraz dziesięć klocków domina rozmiaru 2×1 (można je obracać).



Rozstrzygnij, czy danymi jedenastoma klockami można przykryć planszę o wymiarach 5×5.

2. Dana jest plansza o wymiarach 5×5 i skoczek (koń szachowy) w jej narożnym polu. Po pewnej liczbie ruchów okazało się, że skoczek wrócił na pole, z którego wystartował. Czy możliwym jest, by skoczek był na każdym polu dokładnie raz (poza polem startowym, na którym nie był ani razu poza pierwszym i ostatnim ruchem)?

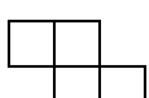
3. *T-klockiem* nazwiemy figurę powstałą po przyłączeniu kwadratów 1×1 do trzech boków kwadratu 1×1.



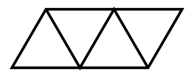
Czy z 25 *T-klocków* można ułożyć kwadrat o wymiarach 10×10?

4. Ile najwięcej króli można umieścić na szachownicy 8×8 tak, by żadne dwa się nie biły? Dwa króle biją się, jeżeli stoją na polach o wspólnym boku lub wspólnym wierzchołku.

5. Czy kwadratową planszę o boku 100 można wypełnić 25 *Z-klockami*, takimi jak na rysunku niżej?



6. Dany jest trójkąt równoboczny o boku długości 6, podzielony na 36 jednostkowych trójkątów równobocznych. Czy można ten trójkąt rozciąć na klocki o następującym kształcie?



Równoległobok na rysunku składa się z 4 trójkątów równobocznych o boku długości 1.

7. Z kwadratowej planszy o boku długości 7 usunięto wszystkie cztery narożniki. Czy możliwe jest pokrycie otrzymanej planszy prostokątami o wymiarach 3×1? Prostokąty można obracać o $90°$.

8. Z kwadratowej planszy o boku długości 99 usunięto jeden narożnik. Czy możliwe jest pokrycie otrzymanej planszy prostokątami o wymiarach 5×1? Prostokąty można obracać o $90°$.

9. (Obóz Naukowy OMG na poziomie OM w 2016 roku)
Czy kwadrat o boku długości 1000 można tak podzielić na prostokąty, z których każdy ma wymiary 2×7 lub 3×5, tak aby dłuższe boki wszystkich prostokątów tego podziału były równoległe?

10. Kwadratową planszę o boku 7 pokryto szesnastoma klockami o wymiarach 3×1 i jednym klockiem 1×1. Udowodnij, że klocek 1×1 leży na środku planszy lub przy jej krawędzi.

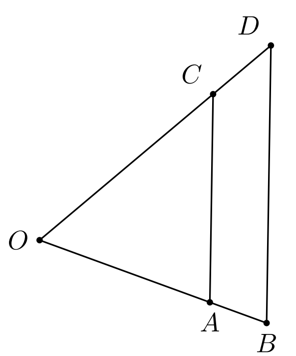
10 Twierdzenie Talesa

W geometrii często spotykamy zadania, w których wymagane jest uzasadnienie równoległości danych prostych, lub badanie stosunku, w jakim dany punkt dzieli odcinek. W takich sytuacjach przydatne może być twierdzenie Talesa. Często wykorzystujemy je w połączeniu z własnościami trójkątów podobnych.

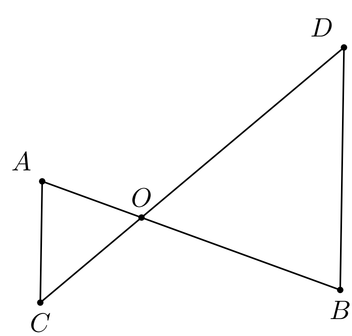
Twierdzenie (Tales)
Dane są punkty A, B, C, D; punkt O jest przecięciem prostych AB i CD. Punkty O, A, B i O, C, D leżą na odpowiednich prostych tak, jak na rysunkach niżej. Wówczas proste AC i BD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Uwaga
Z równoległości prostych AC i BD wynika proporcja $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$. Natomiast odwrotna implikacja nie jest prawdziwa.



Rysunek 1



Rysunek 2

Przykład 1

Wykaż, że twierdzenie Talesa jest także prawdziwe, gdy równość $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$ zastąpimy równością

$$\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}.$$

Rozwiązanie

Zauważmy, że wystarczy wykazać, że pierwsza równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi druga.

W konfiguracji z rysunku 1 mamy

$$1 - \frac{OA}{OB} = \frac{OB - OA}{OB} = \frac{AB}{OB}$$
$$1 - \frac{OC}{OD} = \frac{OD - OC}{OD} = \frac{CD}{OD}.$$

Lewe strony powyższych równości są równe wtedy i tylko wtedy, gdy prawe są równe, co dowodzi tezy w rozważanym przypadku.

W konfiguracji z rysunku 2 mamy z kolei

$$1 + \frac{OA}{OB} = \frac{OB + OA}{OB} = \frac{AB}{OB}$$
$$1 + \frac{OC}{OD} = \frac{OD + OC}{OD} = \frac{CD}{OD}.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, lewe strony powyższych równości są równe wtedy i tylko wtedy, gdy prawe strony są równe, co kończy rozwiązanie zadania.

Przykład 2 (Twierdzenie o dwusiecznej)

W trójkącie ABC dwusieczna kąta przy wierzchołku C przecina bok AB w punkcie D. Wykaż, że

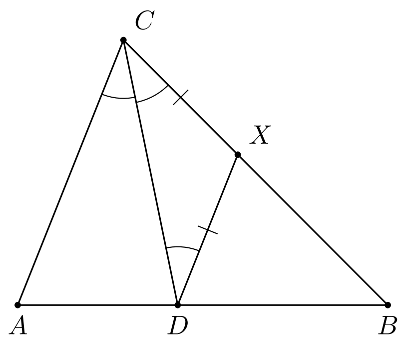
$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}.$$

Rozwiązanie

By można było zastosować twierdzenie Talesa, do rozważanej konfiguracji wprowadzić należy pewne proste równoległe.

Prowadzimy prostą równoległą do boku AC przechodzącą przez punkt D i oznaczmy jej punkt przecięcia z odcinkiem BC przez X. Wtedy z twierdzenia Talesa, zastosowanego dla prostych równoległych AC i DX oraz punktu B, mamy

$$\frac{AC}{CB} = \frac{DX}{XB} \quad \text{i} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{CX}{XB}.$$



W takim razie pozostało nam udowodnić równość $DX = CX$. Skoro CD jest dwusieczną kąta ACB i proste AC oraz DX są równoległe, to

$$\sphericalangle XCD = \sphericalangle DCA = \sphericalangle CDX,$$

czyli trójkąt CXD jest równoramienny. Stąd dostajemy równość $DX = CX$, co kończy dowód.

Zadania

1. Punkty X oraz Y leżą odpowiednio na bokach AC i BC trójkąta ABC, przy czym

$$AX = CX + CY \quad \text{i} \quad BY = 2CY.$$

Wykaż, że jeśli proste XY oraz AB są równoległe, to trójkąt ABC jest równoramienny.

2. Dany jest trapez $ABCD$, o podstawach AB oraz CD. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta równoległa do podstaw trapezu, przechodząca przez punkt E, przecina odcinki AD i BC odpowiednio w punktach X i Y. Udowodnij, że punkt E jest środkiem odcinka XY.

3. Punkty D, F leżą na boku AC trójkąta ABC i spełniają

$$CD = DF = FA = \frac{1}{3}AC.$$

Punkty E, G leżą na boku BC i spełniają analogiczne zależności

$$CE = EG = GB = \frac{1}{3}BC.$$

Wykaż, że $DE + FG = AB$.

4. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty M, N są odpowiednio środkami ramion AD i BC. Wykaż, że

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

5. Dany jest punkt X oraz prostokąt $ABCD$. Punkty P, Q, R, S leżą odpowiednio na odcinkach XA, XB, XC i XD. Wiadomo, że zachodzą równości:

$$\frac{AX}{PX} = \frac{BX}{QX} = \frac{CX}{RX} = \frac{DX}{SX}.$$

Udowodnij, że czworokąt $PQRS$ jest prostokątem.

6. Dany jest trapez $ABCD$, który nie jest równoległobokiem, o podstawach AB i CD. Punkty X, Y leżą odpowiednio na bokach BC i AD, przy czym proste AX i CY są do siebie równoległe. Wykaż, że proste BY i DX również są do siebie równoległe.

7. (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD, w którym zachodzi równość $AB + CD = AD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Prosta przechodząca przez punkt E i równoległa do podstaw trapezu przecina ramię AD w punkcie F. Udowodnij, że $\sphericalangle BFC = 90°$.

8. Półokrąg o średnicy AB leży poza trójkątem równobocznym ABC. Punkty D, E dzielą półokrąg na trzy równe części. Wykaż, że proste CD, CE dzielą odcinek AB na trzy równe części.

9. Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$. Pola trójkątów ABC i ABD wynoszą odpowiednio 2 i 6. Oznaczmy jako M środek odcinka CD. Oblicz pole trójkąta ABM.

10. Dany jest pięciokąt $ABCDE$ i punkty X, Y, Z, T i W, leżące odpowiednio na bokach AB, BC, CD, DE i EA. Wiadomo, że odcinki XY, YZ, ZT, TW, WX są równoległe odpowiednio do przekątnych AC, BD, CE, DA, EB. Udowodnij, że punkt X jest środkiem boku AB.

11 Działania na pierwiastkach

Wyrażenia algebraiczne zawierające pierwiastki są zazwyczaj niełatwe do przekształcenia. Trzeba wykazać się dobrą znajomością wzorów skróconego mnożenia i umiejętnością dostrzegania ich zastosowań w nietypowych sytuacjach. Zwykłe podniesienie do kwadratu może niekiedy spowodować jedynie skomplikowanie równania.

Podnosząc do kwadratu sumę lub różnicę pierwiastków możemy skorzystać ze wzorów skróconego mnożenia:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 = x+2\sqrt{xy}+y,$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = x-2\sqrt{xy}+y.$$

Sumy dwóch pierwiastków w mianowniku możemy się pozbyć korzystając z następującego przekształcenia:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}.$$

W powyższym przekształceniu korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Przykład 1 (I OMG, zawody I stopnia)
Wykaż, że zachodzi równość

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1.$$

Rozwiązanie

W wyjściowym równaniu mamy trzy wyrażenia pod pierwiastkami. Wydawać by się mogło, że podniesienie stron tej równości do kwadratu pomoże w rozwiązaniu, jednak nie damy rady w ten sposób zmniejszyć liczby wyrażeń pierwiastkowych. Konieczne będzie dostrzeżenie dość dobrze ukrytych wzorów skróconego mnożenia. Zauważamy, że zachodzą równości:

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = 2-2\sqrt{2}+1 = 3-\sqrt{8},$$
$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 3-2\sqrt{6}+2 = 5-\sqrt{24},$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-\sqrt{48}.$$

Oczywistym jest, że obie liczby $\sqrt{2}-1$ i $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ są dodatnie. Zaś w trzecim przypadku mamy $2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3}>0$. Stąd

$$\begin{aligned}\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}} &= \\ = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} &= \\ = \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right) &= 1.\end{aligned}$$

Uwaga

Fakt, że liczby $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ i $2-\sqrt{3}$ są dodatnie jest istotny, ponieważ równość $\sqrt{x^2}=x$ zachodzi jedynie dla liczb nieujemnych.

Przykład 2

Dane są takie liczby naturalne a i b, że liczba $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ jest wymierna. Wykaż, że obie liczby $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ są wymierne.

Rozwiązanie

Na początku przypomnijmy sobie czym jest liczba wymierna. Jest to liczba, którą można przedstawić w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz $q \neq 0$. Wiemy, że iloczyn, iloraz, suma i różnica liczb wymiernych również jest liczbą wymierną. Zauważmy, że liczba

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

jest wymierna, gdyż liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ i $a-b$ są wymierne oraz iloraz liczb wymiernych jest liczbą wymierną. Skoro liczby $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ i $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ są wymierne to ich suma też, czyli liczba $2\sqrt{a}$ również jest wymierna. Stąd wynika, że liczba $\sqrt{a}$ jest wymierna. Czyli liczba $\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a}$ też jest wymierna, co kończy dowód.

Zadania

1. Wykaż, że zachodzi równość
$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}=4.$$

2. (IX OMG, zawody II stopnia)
Czy istnieje taka trójka liczb nieparzystych (a,b,c), że zachodzi równość
$$\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{a+b}?$$
Odpowiedź uzasadnij.

3. (VII OMG, zawody I stopnia)
Czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, dla których
$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x+y?$$
Odpowiedź uzasadnij.

4. Udowodnij, że zachodzi nierówność
$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}<9.$$

5. Udowodnij, że liczba
$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$$
jest całkowita. Podaj jej wartość.

6. Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c. Udowodnij, że z odcinków o długościach $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ i $\sqrt{c}$ można zbudować trójkąt.

7. Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych m i n takich, że zachodzi równość $mn=\sqrt{m^2+n^2}+m+n$.

8. (VII OMG, zawody III stopnia)
Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że w zapisie dziesiętnym liczby
$$\sqrt{100^n+2}$$
na n-tym miejscu po przecinku jest cyfra 0.

9. Dane są liczby rzeczywiste x, y, dla których zachodzi równość

$$\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)=1.$$

Udowodnij, że $x+y=0$.

10. Wykaż, że zachodzi następująca nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}}>40.$$

12 NWD i NWW

W rozwiązywaniu zadań dotyczących podzielności przydaje się znajomość podstawowych własności największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wspólnej wielokrotności, a także związane z nimi pojęcie względnej pierwszości liczb całkowitych.

Definicje

Rozważmy liczby całkowite a i b, które nie są obydwie równe 0. Największą liczbę całkowitą dzielącą a i b nazywamy ich *największym wspólnym dzielnikiem* i oznaczamy $\mathrm{NWD}(a,b)$.

Jeśli liczby a i b nie mają żadnych wspólnych dzielników większych od 1, to $\mathrm{NWD}(a,b)=1$. W takim przypadku będziemy mówić, że liczby a i b są *względnie pierwsze*.

Najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, która jest podzielna przez a i b nazywamy ich *najmniejszą wspólną wielokrotnością* i oznaczamy przez $\mathrm{NWW}(a,b)$.

Twierdzenie

Niech a, b i k będą liczbami całkowitymi, przy czym a, b nie są obydwie równe zero. Wówczas $\mathrm{NWD}(a,b)=\mathrm{NWD}(a,b-ka)$.

Dowód

Zauważmy, że jeżeli liczby a, b są podzielne przez pewną liczbę d, to liczba $b-ka$ również jest podzielna przez d. Prawdą jest również, że jeśli a oraz $b-ka$ są podzielne przez pewną liczbę d, to również liczba $b=(b-ka)+ka$ jest podzielna przez d.

Dowolny wspólny dzielnik liczb a, b jest zatem również wspólnym dzielnikiem liczb a, $b-ka$. Zatem $\mathrm{NWD}(a,b)\leq\mathrm{NWD}(a,b-ka)$. Analogicznie, dowolny wspólny dzielnik liczb a, $b-ka$ jest wspólnym dzielnikiem liczb a,b, skąd $\mathrm{NWD}(a,b-ka)\leq\mathrm{NWD}(a,b)$.

Fakt 1.
Dla dowolnych liczb całkowitych a, b i k zachodzi

$$\mathrm{NWD}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{NWD}(a, b).$$

Fakt 2.
Jeśli $\mathrm{NWD}(a, k) = 1$, to wówczas zachodzi równość

$$\mathrm{NWD}(a, kb) = \mathrm{NWD}(a, b).$$

Rozwiązując równanie w liczbach całkowitych a i b warto jest niekiedy zapisać $d = \mathrm{NWD}(a, b)$. Wówczas $a = dx$ i $b = dy$, dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych x i y. Zastosowanie tej metody obrazuje Przykład 2.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań warto sobie przypomnieć podstawowe własności podzielności opisane w Rozdziale 5.

Przykład 1

Udowodnij, że ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest nieskracalny, dla każdej dodatniej liczby całkowitej n.

Rozwiązanie

Zauważmy, że ułamek jest nieskracalny wtedy i tylko wtedy, gdy jego licznik jest względnie pierwszy z mianownikiem. Dobrym sposobem na wykazanie względnej pierwszości dwóch liczb jest kilkukrotne zastosowanie udowodnionego wyżej twierdzenia.

$$\begin{aligned}
\mathrm{NWD}(21n+4, 14n+3) =& \mathrm{NWD}(21n+4-14n-3, 14n+3) \\
=& \mathrm{NWD}(7n+1, 14n+3) \\
=& \mathrm{NWD}(7n+1, 14n+3-2(7n+1)) \\
=& \mathrm{NWD}(7n+1, 1) = 1.
\end{aligned}$$

Zatem dla każdej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\mathrm{NWD}\,(21n+4, 14n+3) = 1,$$

skąd wniosek, że ułamek $\frac{21n+4}{14n+3}$ jest zawsze nieskracalny.

Przykład 2

Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie a i b takie, że

$$ab \,\Big|\, (a+b)^2.$$

Rozwiązanie

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Wówczas dla pewnych względnie pierwszych liczb całkowitych x i y zachodzi $a = dx$ i $b = dy$. Z tymi oznaczeniami podzielność z treści zadania przyjmuje postać

$$dx \cdot dy \,\Big|\, (dx+dy)^2, \qquad \text{więc} \qquad xy \,\Big|\, (x+y)^2.$$

Skorzystajmy teraz z Twierdzenia, by obliczyć $\mathrm{NWD}(x+y,y)$.

$$\mathrm{NWD}(x+y,y) = \mathrm{NWD}((x+y)-y,y) = \mathrm{NWD}(x,y) = 1.$$

Z powyższych równości na podstawie Faktu 2 wynika, że

$$\mathrm{NWD}(x+y,xy) = \mathrm{NWD}(x+y,x).$$

Podobnie możemy wykazać, że zachodzi $\mathrm{NWD}(x+y,x) = 1$, zatem $\mathrm{NWD}(x+y,xy) = 1$. Znów korzystając z Faktu 2, uzyskujemy

$$\mathrm{NWD}\Big((x+y)^2,xy\Big) = \mathrm{NWD}(x+y,xy) = 1,$$

a ponieważ $xy \,\Big|\, (x+y)^2$, to zajść musi $xy = 1$, więc $x = y = 1$, zatem $a = b = d$. Łatwo sprawdzić, że wszystkie takie pary spełniają wyjściową podzielność.

Uwaga

Przy okazji udowodniliśmy, że dla względnie pierwszych liczb x i y zachodzi $\mathrm{NWD}(x+y,xy) = \mathrm{NWD}((x+y)^2,xy) = 1$.

Zadania

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Wykaż, że liczby $2n+1$ oraz $3n+1$ są względnie pierwsze.

2. Udowodnij, że dla dowolnych różnych dodatnich liczb całkowitych a i b zachodzi

$$\mathrm{NWD}(a,b) \leqslant \frac{a+b}{3}.$$

3. Wykaż, że dla dowolnych liczb całkowitych a, b zachodzi

$$\mathrm{NWW}(a,b)+\mathrm{NWD}(a,b)\geqslant a+b.$$

4. Wyznacz największą dodatnią liczbę całkowitą n taką, że liczba n^3+100 jest podzielna przez $n+10$.

5. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite n takie, że istnieją różne dodatnie liczby całkowite a, b, dla których

$$a^n-b^n \,\Big|\, a^n+b^n.$$

6. (XII OMJ, zawody II stopnia)
Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, d. Wiadomo, że liczba $a+b$ jest podzielna przez d, a liczba $a\cdot b$ jest podzielna przez d^2. Udowodnij, że każda z liczb a i b jest podzielna przez d.

7. Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, takie że liczba

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

jest całkowita. Udowodnij, że $\mathrm{NWD}(a,b)\leqslant\sqrt{a+b}$.

8. (VII OMG, zawody III stopnia)
Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, że iloczyn ab jest podzielny przez sumę $a+b$. Niech d będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb a i b. Wykaż, że $d\geqslant\sqrt{a+b}$.

9. Dana jest dodatnia liczba całkowita m. Znajdź największą możliwą wartość wyrażenia $\mathrm{NWD}(n^2+m,(n+1)^2+m)$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą.

10. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite m, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n zachodzi

$$\mathrm{NWD}(mn+1,2n+1)=1.$$

13 Podwójne zliczanie

Jeśli zliczamy elementy pewnego zbioru lub wyznaczamy sumę pewnych liczb na dwa sposoby, to wyniki otrzymane w ten sposób muszą być równe. Ta prosta obserwacja jest wykorzystywana w zadaniach z różnych działów matematyki, zwłaszcza kombinatoryki.

Na olimpiadach metoda ta występuje na przykład w kontekście tablic wypełnionych liczbami: gdy dodamy liczby w wierszach, a następnie dodamy otrzymane sumy, to wynik będzie taki sam jak wtedy, gdy zaczniemy od dodawania liczb w kolumnach.

Podobnie przy dzieleniu zbioru liczb na rozłączne podzbiory: gdy dodamy liczby w każdej z grup, a następnie dodamy otrzymane sumy, to wynik będzie równy sumie liczb ze zbioru.

W rozwiązywaniu poniższych zadań przyda się znajomość poniższego wzoru.

Twierdzenie

Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Dowód

Oznaczmy sumę daną w zadaniu jako S. Wówczas mamy

$$\begin{array}{rcccccccc}
S= & 1 & + & 2 & +\ldots+ & (n-1) & + & n, \\
+S= & n & + & (n-1) & +\ldots+ & 2 & + & 1, \\
\hline
2S= & (n+1) & + & (n+1) & +\ldots+ & (n+1) & + & (n+1),
\end{array}$$

$$2S=n(n+1),$$

z czego wprost wynika postulowana tożsamość.

Przykład 1

Wykaż, że liczb 1, 2, ..., 45 nie można podzielić na piętnaście grup po trzy liczby w taki sposób, żeby w każdej grupie jedna z liczb była sumą dwóch pozostałych.

Rozwiązanie

Przypuśćmy nie wprost, że taki podział istnieje. Niech $a < b < c$ będą liczbami z pewnej grupy. Wtedy $c = a + b$, zatem $a + b + c = 2c$, czyli suma liczb w obrębie tej grupy jest parzysta. Analogicznie możemy uzasadnić, że suma liczb w obrębie każdej innej grupy jest parzysta.

Dodając wszystkie te sumy otrzymujemy z jednej strony sumę liczb parzystych, czyli liczbę parzystą, a z drugiej strony sumę wszystkich liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 45\}$. Jest ona jednak równa

$$1 + 2 + \ldots + 45 = \frac{45 \cdot 46}{2} = 1035,$$

co jest liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukany podział nie istnieje.

Przykład 2

Każdy użytkownik pewnego portalu społecznościowego ma na nim dokładnie a znajomych, zaś każdych dwóch użytkowników ma na nim dokładnie b wspólnych znajomych. Wyznacz liczbę użytkowników tego portalu.

Rozwiązanie

Niech n będzie liczbą użytkowników tego portalu. Trójkę uporządkowaną (A, B, C) nazwiemy *dobrą*, jeśli A i B znają C. Niech T oznacza liczbę dobrych trójek uporządkowanych złożonych z użytkowników tego portalu. Obliczymy teraz liczbę T na dwa sposoby.

Z jednej strony konstruując dobrą trójkę możemy najpierw wybrać osobę A na n sposobów, potem dobrać osobę B na $n - 1$ sposobów, a na końcu osobę C tak, by była ona znajomym A i B – z założeń zadania na b sposobów. Zatem łącznie dobrych trójek jest $n \cdot (n - 1) \cdot b$.

Z drugiej strony konstrukcję dobrej trójki możemy zacząć od wyboru osoby C; na n sposobów, a następnie spośród jego znajomych dobrać osobę A – z założeń zadania na a sposobów; osobę B – znów z założeń zadania – na $a-1$ sposobów. Co łącznie daje $n \cdot a \cdot (a-1)$ dobrych trójek.

Ponieważ obie te liczby określają liczbę dobrych trójek, to obie są równe T, zatem muszą one być sobie równe, więc

$$n(n-1)b = T = na(a-1),$$
$$(n-1)b = a(a-1),$$
$$n = \frac{a(a-1)}{b} + 1,$$

co należało obliczyć.

Odpowiedź. Ten portal ma $\frac{a(a-1)}{b} + 1$ użytkowników.

Zadania

1. Czy liczby 1, 2, …, 20 można podzielić na cztery parami rozłączne grupy tak, by sumy liczb w każdej z grup były takie same?

2. Dana jest szkoła, do której chodzi 300 uczniów. Każdy z nich należy do co najmniej dziesięciu kółek zainteresowań. Każde kółko liczy co najwyżej 10 członków. Wykaż, że jest co najmniej 300 kółek zainteresowań.

3. Każda ściana pewnego wielościanu ma liczbę boków podzielną przez 4. Wykaż, że wielościan ten ma parzystą liczbę krawędzi.

4. Krawędzie dwudziestościanu foremnego ponumerowano liczbami $1, 2, \ldots, 30$. W każdy wierzchołek wpisano sumę liczb z krawędzi z niego wychodzących. Czy jest możliwe, żeby wszystkie liczby wpisane w wierzchołki były podzielne przez 4?

5. (XII OMJ, zawody I stopnia)
W każde pole tablicy 11×11 należy wpisać jedną z liczb -1, 0, 1 w taki sposób, aby suma liczb w każdej kolumnie była nieujemna, a suma liczb w każdym wierszu była niedodatnia. Jaką najmniejszą liczbę zer można w ten sposób wpisać w pola tablicy?

6. Wykaż, że krawędzi sześcianu nie można ponumerować liczbami 1, 2, …, 12 używając każdej dokładnie raz, tak aby suma liczb napisanych na krawędziach wychodzących z dowolnego wierzchołka była taka sama.

7. (XII OMJ, zawody II stopnia)
W każde pole tablicy 4×4 należy wpisać pewną liczbę całkowitą w taki sposób, aby sumy liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu były potęgami liczby 2 o wykładniku całkowitym nieujemnym. Czy można to zrobić w taki sposób, aby każde dwie z tych ośmiu sum były różne? Odpowiedź uzasadnij.

8. (X OMG, zawody II stopnia)
W każde pole tablicy o wymiarach 9×9 wpisano pewną dodatnią liczbę całkowitą. Następnie obliczono sumy liczb znajdujących się w każdym wierszu i w każdej kolumnie. Czy może się zdarzyć, że 18 obliczonych sum to kolejne liczby naturalne w pewnym porządku?

9. (Obóz Naukowy OMG w 2016 roku)
Czy zbiór liczb $\{1,2,3,...,3n-2,3n-1,3n+1\}$ można podzielić na n podzbiorów trójelementowych tak, aby liczby w każdym z podzbiorów były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?

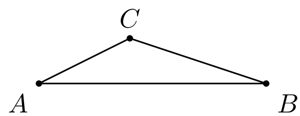
Uwaga
Ciąg arytmetyczny to ciąg, w którym różnica każdych dwóch kolejnych wyrazów jest stała.

10. Jaś ponumerował wierzchołki sześcianu liczbami od 1 do 8 tak, że każdej liczby użył dokładnie raz. Następnie na każdej krawędzi napisał liczbę, która jest równa sumie liczb z wierzchołków danej krawędzi. Wykaż, że na pewnych dwóch krawędziach napisano taką samą liczbę.

14 Nierówność trójkąta

Nierówność trójkąta to jedno z najprostszych narzędzi służących powiązaniu zagadnień geometrycznych z zależnościami algebraicznymi, zwłaszcza dotyczącymi szacowania odległości.

Fakt 1 (Nierówność trójkąta)



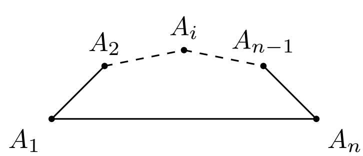
Dla każdych trzech punktów A, B, C na płaszczyźnie (lub w przestrzeni) zachodzi nierówność

$$AC + CB \geqslant AB\,,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt C należy do odcinka AB.

Powyższy fakt można uogólnić, by był prawdziwy dla więcej niż trzech punktów.

Fakt 2 (Uogólniona nierówność trójkąta)



Dane są punkty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, gdzie $n \geqslant 2$. Wówczas zachodzi nierówność

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n \geqslant A_1A_n,$$

przy czym równość zachodzi, gdy punkty $A_2, A_3, ..., A_{n-1}$ leżą w podanej kolejności na odcinku A_1A_n.

Przykład 1

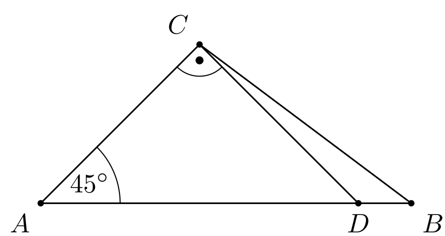
Dany jest trójkąt ABC, w którym miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A wynosi $45°$, a kąt przy wierzchołku C jest rozwarty. Wykazać, że zachodzi nierówność

$$BC + (\sqrt{2} - 1) \cdot CA < AB.$$

Rozwiązanie

Skoro kąt przy wierzchołku C jest rozwarty, to na odcinku AB istnieje taki punkt D, że $\sphericalangle ACD = 90°$. Skoro $\sphericalangle CAD = 45°$, to trójkąt ACD jest prostokątny i równoramienny. Stąd

$$AD = \sqrt{2} \cdot AC = \sqrt{2} \cdot CD.$$



Teraz wykorzystamy nierówność trójkąta BCD, otrzymując

$$CD + DB > BC.$$

Korzystając z wykazanych wcześniej równości mamy

$$CD + DB = AC + AB - AD > BC,$$

$$AB > BC + (AD - AC) = BC + (\sqrt{2} - 1) \cdot AC.$$

Ostatnia równość jest tą, która była do wykazania.

Uwaga

W powyższym zadaniu wskazaliśmy trójkąt, dla którego odpowiednio zapisana nierówność dotycząca długości boków pozwoliła uzyskać tezę. Szukanie odpowiednich trójkątów, gdy do udowodnienia jest pewna nierówność geometryczna, bardzo często prowadzi do rozwiązania.

Przykład 2

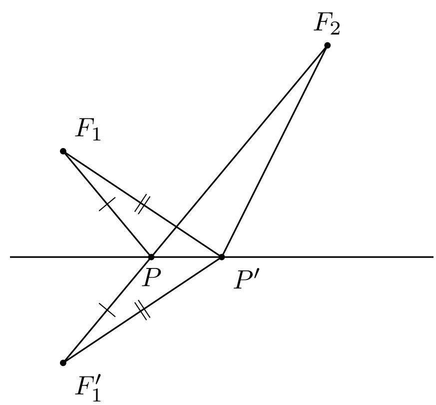
Dana jest prosta l oraz punkty F_1 i F_2. Znajdź taki punkt P leżący na prostej l, że wartość wyrażenia

$$F_1P + F_2P$$

jest możliwie najmniejsza. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie

Niech F_1' będzie symetryczny do punktu F_1 względem prostej l. Niech punkt P powstaje w wyniku przecięcia prostej $F_1'F_2$ z prostą l. Wykażemy, że tak skonstruowany punkt P spełnia warunki zadania.



Weźmy dowolny punkt P' na prostej l. Z założeń wynika, że P leży na odcinku $F_1'F_2$. Skoro prosta l jest symetralną odcinka F_1F_1', to prawdziwe są równości:

$$F_1P = F_1'P \quad \text{oraz} \quad F_1P' = F_1'P'.$$

Wówczas zapisując nierówność trójkąta dla trójkąta $F_1'P'F_2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} F_1P' + F_2P' = F_1'P' + F_2P' \geqslant \\ \geqslant F_1'F_2 = F_1'P + F_2P = F_1P + F_2P, \end{aligned}$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P' = P$. Stąd punkt P jest szukanym punktem na prostej l.

Zadania

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Udowodnij, że

$$AC+BD > AB+CD.$$

2. Znajdź punkt, którego suma odległości od wierzchołków danego czworokąta wypukłego $ABCD$ jest najmniejsza.

3. Dany jest trójkąt, którego długości boków są kolejnymi całkowitymi potęgami pewnej liczby całkowitej dodatniej a. Udowodnij, że trójkąt ten jest równoboczny.

4. Dana jest prosta l oraz takie punkty F_1 i F_2 leżące po przeciwnych stronach prostej l, że ich odległości od prostej l są różne. Znajdź taki punkt P leżący na prostej l, że wartość wyrażenia

$$|F_1P - F_2P|$$

jest możliwie największa.

5. Dany jest czworokąt $ABCD$ oraz punkty M i N będące środkami odpowiednio boków AB i CD. Wykaż, że

$$BC+DA \geqslant 2\cdot MN,$$

oraz równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy boki BC i DA są równoległe.

6. (IV OMG, zawody III stopnia)
Dany jest okrąg o środku S oraz punkt D leżący na tym okręgu. Cięciwa AB przecina odcinek SD w punkcie C, różnym od punktu S. Wykaż, że $AB > 2CD$.

7. (VII OMG, zawody I stopnia)
W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Wykaż, że obwód trójkąta ACE jest nie mniejszy od $2\cdot BD$.

8. Znajdź najkrótszą możliwą ścieżkę pomiędzy przeciwległymi wierzchołkami sześcianu zawartą w jego brzegu (sumie wszystkich ścian).

9. (II OMG, zawody I stopnia)
W trójkącie ABC punkt M jest środkiem odcinka BC oraz $\sphericalangle BAC = 120°$. Udowodnij, że
$$AM \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6} BC.$$

10. (VI OMG, zawody III stopnia)
Wewnątrz koła o promieniu 1 znajdują się punkty A_1, A_2, …, A_{100}. Udowodnij, że na brzegu tego koła istnieje taki punkt P, dla którego
$$PA_1 + PA_2 + \cdots + PA_{100} > 100.$$

15 Nierówności

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest liczbą nieujemną. Korzystając z tej obserwacji jesteśmy w stanie udowodnić wiele nierówności – niekiedy niełatwych.

Twierdzenie

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab.$$

Dowód

Przekształćmy wyjściową nierówność równoważnie, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0,$$

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$

Zauważmy, że kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, czyli ostatnia nierówność istotnie jest prawdziwa. Skoro wszystkie przekształcenia były równoważne, to prawdziwa jest również wyjściowa nierówność.

Uwaga. Równoważna nierówność znana jest pod nieco inną formą jako podstawowa wersja nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną. Mówi ona o tym, że dla dowolnych liczb nieujemnych x, y zachodzi nierówność:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}.$$

Dowód polega na podstawieniu $\sqrt{x}$ pod a i $\sqrt{y}$ pod b w Twierdzeniu uzasadnionym wyżej.

Przykład 1
Udowodnij, że
$$a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b$$
dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b.

Rozwiązanie
W tym zadaniu, podobnie jak w dowodzie Twierdzenia wyżej, skorzystamy z tego, że kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny. Zauważmy, że poniższe nierówności są sobie równoważne:
$$\begin{aligned} a^2+b^2+1 &\geqslant ab+a+b, \\ 2a^2+2b^2+2 &\geqslant 2ab+2a+2b, \\ 2a^2+2b^2+2-2ab-2a-2b &\geqslant 0, \\ (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1) &\geqslant 0, \\ (a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$
Skoro kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest nieujemny, to lewa strona otrzymanej nierówności również jest nieujemna. Wszystkie przekształcenia były równoważne, co dowodzi prawdziwości tezy.

Nie wszystkie dowody nierówności korzystają z tego, że kwadrat liczby rzeczywistej jest nieujemny. Jedno z takich zadań ilustruje następujący przykład.

Przykład 2 (XI OMG, zawody III stopnia)
Dodatnie liczby a, b i c są nie większe od 2. Wykaż, że
$$a+b+c+2 \geqslant abc.$$

Rozwiązanie
Zauważmy, że skoro $2 \geqslant a, b, c$, to $8 = 2\cdot 2\cdot 2 \geqslant abc$ oraz
$$4a = a\cdot 2\cdot 2 \geqslant abc, \quad 4b = 2\cdot b\cdot 2 \geqslant abc, \quad 4c = 2\cdot 2\cdot c \geqslant abc.$$
Dodając powyższe nierówności otrzymujemy, że
$$4a+4b+4c+8 \geqslant 4abc.$$
Dzieląc powyższą nierówność stronami przez 4 otrzymujemy tezę.

Uwaga
W powyższym zadaniu skorzystaliśmy z tego, że liczby a, b i c są nie większe niż 2. Łatwo zauważyć, że gdyby tego założenia zabrakło, analogicznie sformułowana nierówność nie musiałaby zajść. Chociażby dla $a = b = c = 3$ mamy

$$11 = a + b + c + 2 < abc = 27.$$

W trakcie myślenia nad zadaniem warto zwracać uwagę na to, że wykorzystania założeń zadania zazwyczaj nie można pominąć. Dobre ich użycie jest niezbędne do otrzymania poprawnego rozwiązania. Gdy wydaje nam się, że poprawnie rozwiązaliśmy zadanie, ale nie korzystamy z kluczowych założeń, to jest bardzo duża szansa, że nasze rozumowanie nie jest poprawne. Warto wtedy jeszcze raz przeanalizować swój tok rozumowania w poszukiwaniu błędu.

Zadania

1. Udowodnij, że

$$\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$$

dla dowolnej niezerowej liczby rzeczywistej x.

2. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a i b zachodzi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}.$$

3. Dane są liczby rzeczywiste $a, b, c \geqslant \sqrt{3}$. Wykaż, że

$$abc \geqslant a + b + c.$$

4. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$2(a-c)^2 + 2(b-c)^2 \geqslant (a-b)^2.$$

5. Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

6. (II OMG, zawody I stopnia)
Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: dla każdej pary dodatnich liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$xy^n < x^4 + y^4.$$

7. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b i c zachodzi nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant a+b+c.$$

8. (VI OMG, zawody II stopnia)
Wykaż, że dla dowolnych liczb x, y należących do przedziału $(0,1)$ spełniona jest nierówność

$$x(1-y)^2 + y(1-x)^2 < (1-xy)^2.$$

9. Dane są dodatnie liczby $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, dla których zachodzi równość $a+b+c+d=1$. Udowodnij, że

$$a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant 1.$$

10. Dane są dodatnie liczby a, b i c, dla których prawdziwa jest zależność $abc = ab+bc+ca$. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$abc > 2(a+b+c).$$

11. Dla pewnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność $ab > a+b$. Udowodnij, że

$$a+b > 4.$$

12. Dane są liczby naturalne n i m. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$n^n + m^m \geqslant 2\sqrt{mn}^{\sqrt{mn}}.$$

16 Zasada minimum i maksimum

W każdym skończonym podzbiorze zbioru liczb rzeczywistych istnieje zarówno liczba największa, jak i najmniejsza. W niepustym podzbiorze zbioru dodatnich liczb całkowitych istnieje liczba najmniejsza. Te proste obserwacje mają wiele użytecznych zastosowań.

Przykład 1

Udowodnij, że nie istnieje n takich liczb rzeczywistych x_1, x_2, ..., x_n, że spełnione jest n następujących równań:

$$\begin{cases} x_1 = x_2^2 + 1 \\ x_2 = x_3^2 + 1 \\ \vdots \\ x_n = x_1^2 + 1 \end{cases}$$

Dowód

Przypuśćmy nie wprost, że liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniające dany układ istnieją. Niech x_i będzie najmniejszą spośród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Jeśli istnieje kilka równych liczb o minimalnej wartości, weźmy jedną z nich.

Zauważmy, że zachodzi nierówność

$$x_{i+1}^2 + 1 - x_{i+1} = \left(x_{i+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

gdzie w razie potrzeby przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$. Zatem

$$x_i = x_{i+1}^2 + 1 > x_{i+1},$$

czyli

$$x_i > x_{i+1}.$$

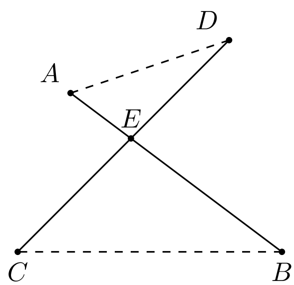
Przeczy to minimalności x_i, co kończy dowód tego, że dany układ nie ma rozwiązań.

Przykład 2

Na płaszczyźnie danych jest n białych i n czarnych punktów, przy czym żadne trzy z tych punktów nie leżą na jednej prostej. Wykaż, że można narysować n odcinków w taki sposób, by każdy z nich miał jeden koniec biały i jeden koniec czarny, oraz by żadne dwa odcinki nie miały punku wspólnego.

Dowód

Połączmy punkty odcinkami tak, aby każdy odcinek miał końce różnych kolorów oraz by suma długości wszystkich odcinków była najmniejsza z możliwych. Wykażemy, że taka konfiguracja spełnia warunki zadania.



Przypuśćmy, że odcinki AB i CD mają wspólny punkt E. Wówczas na mocy nierówności trójkąta mamy

$$
\begin{aligned}
AB + CD &= (AE + BE) + (EC + ED) = \\
&= (AE + ED) + (BE + EC) > AD + BC.
\end{aligned}
$$

Stąd zmiana odcinków AB i CD na AD i BC zmniejszyłaby sumę długości wszystkich odcinków, a to przeczy założeniu o jej minimalności. Powyższa sprzeczność dowodzi, że żadne dwa odcinki nie mają punktu wspólnego.

Zadania

1. W każdy wierzchołek 1000−kąta foremnego wpisano pewną dodatnią liczbę rzeczywistą. Czy możliwe jest, by każda wpisania liczba była równa wartości bezwzględnej różnicy liczb wpisanych w sąsiednie wierzchołki?

2. Rozstrzygnij, czy istnieje wielościan, którego wszystkie ściany są trójkątami, o tej własności, że każda jego krawędź jest naprzeciwko kąta rozwartego pewnej ściany.

3. Dana jest tabela $m \times n$. Powiemy, że pewne dwa pola ze sobą sąsiadują, jeśli mają wspólny bok. W pola tej tabeli wpisano liczby rzeczywiste, tak że każda z nich jest średnią arytmetyczną sąsiadujących z nią liczb. Wykaż, że wszystkie liczby w tabeli są równe.

4. W turnieju pojedynków rycerskich każdy z n rycerzy pojedynkował się z każdym innym, nie było remisów. Po zakończeniu turnieju okazało się, że nie istnieje takich trzech rycerzy A, B, C, że A wygrał z B, B z C i C z A. Wykaż, że istnieje rycerz, który wygrał ze wszystkimi innymi.

5. (IX OMG, zawody II stopnia)
Na płaszczyźnie zaznaczono n punktów ($n \geqslant 3$), z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Każdy z tych punktów pomalowano na jeden z trzech kolorów, przy czym każdego koloru użyto przynajmniej raz. Udowodnij, że istnieje taki trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach, którego każde dwa wierzchołki mają różne kolory i do wnętrza którego nie należy żaden zaznaczony punkt.

6. (V OMG, zawody III stopnia)
Na tablicy napisano skończenie wiele (i więcej niż jedną) różnych liczb rzeczywistych. Okazało się, że dla każdych dwóch napisanych liczb została napisana także ich suma. Jakie liczby napisano na tablicy? Podaj wszystkie możliwości. Odpowiedź uzasadnij.

7. Na bankiecie, po turnieju pojedynków rycerskich, na którym każdy z $n \geqslant 3$ rycerzy pojedynkował się z każdym innym i nie było remisów, pewna grupa rycerzy (przynajmniej trzech) usiadła przy okrągłym stole. Okazało się, że każdy z nich przegrał z rycerzem siedzącym po swojej prawej stronie, zaś wygrał z rycerzem siedzącym po swojej lewej stronie. Wykaż, że istnieje takich trzech rycerzy A, B, C, że A wygrał z B, B z C i C z A.

8. Udowodnij, że równanie $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 8xyz$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

9. Danych jest n czerwonych punktów na płaszczyźnie, przy czym żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Pole każdego trójkąta o czerwonych wierzchołkach jest nie większe niż 1. Wykaż, że istnieje trójkąt, o polu nie większym niż 4, który zawiera wszystkie n czerwonych punktów.

10. Niech n będzie liczbą naturalną. Na każdej z $2n+1$ planet znajduje się astronom i obserwuje najbliższą sobie planetę. Odległości między planetami są parami różne. Wykaż, że istnieje planeta, której nie obserwuje żaden astronom.

17 Liczby pierwsze i złożone

O liczbach pierwszych była mowa w rozdziale poświęconym liczbom całkowitym i wymiernym. Tym razem postaramy się spojrzeć na to zagadnienie z nieco innej perspektywy.

Definicja

Liczbą pierwszą nazywamy taką liczbę całkowitą p większą od 1, której jedynymi dodatnimi dzielnikami są 1 i p.

Przykładami liczb pierwszych są 2, 3 lub 11.

Liczbę całkowitą dodatnią n nazywamy *złożoną*, wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci iloczynu $n = ab$, dla pewnych liczb całkowitych $a, b > 1$.

Liczbami złożonymi są chociażby 4, 6 czy 9.

Należy tutaj wspomnieć, że 1 nie jest ani liczbą pierwszą, ani liczbą złożoną. Można także zauważyć, że każda liczba całkowita większa od 1 jest albo liczbą pierwszą, albo liczbą złożoną.

Fakt

Niech $(p_1, p_2, p_3, \ldots) = (2, 3, 5, \ldots)$ będą wszystkimi liczbami pierwszymi w kolejności rosnącej. Wówczas każdą liczbę naturalną n można zapisać, na dokładnie jeden sposób, w postaci

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ są nieujemnymi liczbami całkowitymi. Ten zapis nazywamy *rozkładem liczby n na czynniki pierwsze.*

Uwaga

W rozkładzie powyżej pomijamy zapisywanie czynników postaci p_i^0 równych 1. W ten sposób rozkład ten ma zawsze skończenie wiele czynników.

Przykład 1

Udowodnij, że liczb pierwszych jest niekończenie wiele.

Dowód

Przypuśćmy nie wprost, że liczb pierwszych jest skończenie wiele. Oznaczmy te liczby jako p_1, p_2, ..., p_n. Wiemy, że 2 jest liczbą pierwszą, więc $n \geqslant 1$. Rozpatrzmy liczbę

$$K = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1.$$

Zauważmy, że jest ona większa od 1.

Liczba $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ jest podzielna przez p_i dla $i \in \{1,...,n\}$. Stąd K nie jest podzielna przez żadną z liczb pierwszych. Jednakże, jak wynika z Faktu, każda liczba całkowita większa od 1 jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Rozwiązanie

Załóżmy nie wprost, że istnieją takie liczby całkowite dodatnie p, q, że zachodzi równość

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Przekształcając powyższą równość równoważnie, otrzymujemy

$$p^2 = 2q^2.$$

Niech

$$p = 2^{\alpha} a \quad \text{i} \quad q = 2^{\beta} b,$$

gdzie a, b są liczbami nieparzystymi. Innymi słowy, α i β będą wykładnikami przy dwójce w rozkładzie odpowiednio p i q na czynniki pierwsze. Zauważmy, że dana równość jest równoważna równości

$$2^{2\alpha} a^2 = 2^{2\beta+1} b^2.$$

Skoro a i b są nieparzyste, to wykładnik przy dwójce w rozkładzie na czynniki pierwsze wynosi odpowiednio 2α i $2\beta + 1$ dla odpowiednio lewej i prawej strony. Wiemy, że jeśli pewne dwie liczby są równe, to wykładniki przy tych samych liczbach pierwszych są sobie równe, czyli

$$2\alpha = 2\beta + 1.$$

Jednak lewa strona powyższej równości jest parzysta, a prawa nie. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Zadania

1. Wykaż, że wszystkie liczby pierwsze większe od 3 można przedstawić w postaci $6k+1$ lub $6k+5$, dla pewnego całkowitego k.

2. (X OMG, zawody III stopnia)
Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą większą od 5 można przedstawić w postaci sumy liczby pierwszej i złożonej.

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi nieparzystymi liczbami pierwszymi. Wykaż, że istnieją niekoniecznie różne liczby pierwsze a, b, c takie, że $abc \,\big|\, p+q$.

4. Znajdź wszystkie liczby całkowite $n \geqslant 2$, dla których zachodzi podzielność $n \,\big|\, (n-1)!$.

Uwaga
Definiujemy $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$ dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$.

5. Czy suma odwrotności k parami różnych liczb pierwszych może być liczbą całkowitą?

6. Wyznacz, ile zer ma na końcu liczba $50!$ zapisana w systemie dziesiętnym.

7. Wykaż, że nie istnieje taka trójka parami różnych liczb pierwszych (p, q, r), że liczba $\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$ jest całkowita.

8. Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n istnieje n kolejnych liczb złożonych.

9. Rozwiąż równanie $p^p + q^q = r^r$ w liczbach pierwszych p, q, r.

10. Dana jest liczba pierwsza p oraz liczba całkowita a, która nie jest podzielna przez p. Wykaż, że istnieje taka liczba całkowita n, że $an-1$ jest podzielna przez p.

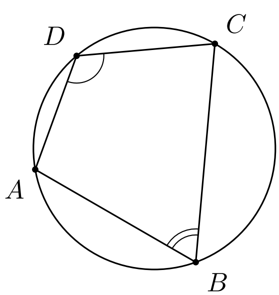
18 Kąty i okręgi

Równości kątów są ściśle związane z okręgami. Zauważanie, że na pewnych figurach można opisać okrąg często pozwala na poczynienie wartościowych wniosków.

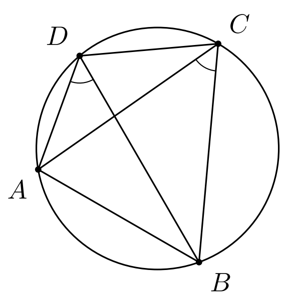
Fakt 1

Czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość

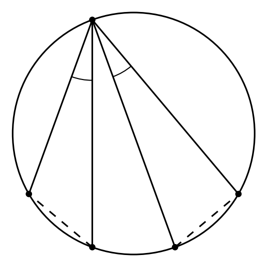
$$\sphericalangle ADC + \sphericalangle CBA = 180°.$$



Fakt 1



Fakt 2



Fakt 3

Fakt 2

Czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$. Powiemy wówczas, że te kąty są *kątami wpisanymi* opartymi na łuku AB tego okręgu.

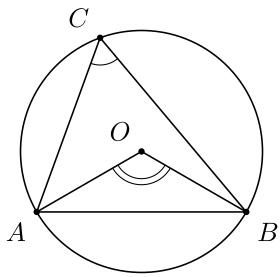
Fakt 3

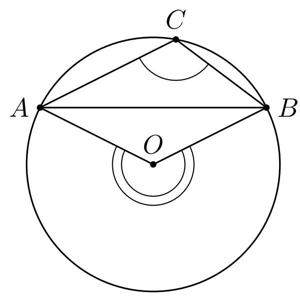
Dwa kąty wpisane w ten sam okrąg mają równe miary wtedy i tylko wtedy, gdy łuki, a tym samym cięciwy, na których są oparte, mają równe długości.

W szczególności wynika stąd, że dwusieczna kąta wpisanego w okrąg połowi łuk, na którym jest on oparty.

Twierdzenie 1

Niech A, B, C będą dowolnymi punktami na okręgu o środku w punkcie O. Wówczas zachodzi równość $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB$.





Uwaga

Kąt $\sphericalangle AOB$ nazywamy *kątem środkowym* opartym na łuku AB. Powyższe twierdzenie mówi więc, że kąt środkowy ma dwa razy większą miarę niż kąt wpisany oparty na tym samym łuku.

Dowód

Zauważmy, że skoro O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to zachodzą równości $OA = OB = OC$, gdyż wszystkie powyższe odcinki są promieniami tego okręgu.

Mamy więc, że trójkąty AOB, BOC, COA są równoramienne. Przyjmijmy więc oznaczenia

$$\sphericalangle ACO = \sphericalangle CAO = \alpha,$$
$$\sphericalangle BCO = \sphericalangle CBO = \beta,$$
$$\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO = \gamma.$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie ABC wynosi $180°$, skąd

$$(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 180°,$$

skąd $\gamma = 90° - \alpha - \beta$. Możemy teraz obliczyć, że

$$\sphericalangle AOB = 180° - 2\gamma = 180° - 2(90° - \alpha - \beta) = 2\alpha + 2\beta.$$

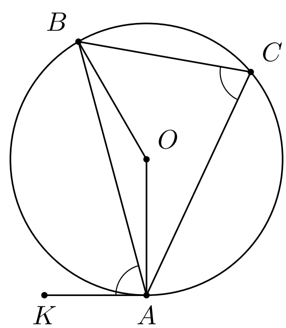
Zauważmy, że $\sphericalangle ACB = \alpha + \beta$, skąd wynika postulowana własność.

Twierdzenie 2 (o kącie między styczną a cięciwą)
Dany jest trójkąt ABC. Punkt K leży po przeciwnej stronie prostej AB niż punkt C oraz prosta AK jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy zachodzi równość

$$\sphericalangle KAB = \sphericalangle ACB.$$

Dowód
Oznaczmy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC przez O. Na mocy poprzedniego twierdzenia wiemy, że zachodzi równość

$$\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB.$$



Trójkąt AOB jest równoramienny, gdyż dwa jego boki są promieniami okręgu opisanego na trójkącie ABC. Stąd $\sphericalangle ABO = \sphericalangle BAO$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\sphericalangle ABO + \sphericalangle BAO + \sphericalangle AOB = 180^\circ, \\ 2\sphericalangle BAO = 180^\circ - \sphericalangle AOB = 180^\circ - 2\sphericalangle ACB, \\ \sphericalangle BAO = 90^\circ - \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Ponieważ prosta styczna jest zawsze prostopadła do promienia poprowadzonego z punktu styczności, to zachodzi równość

$$\sphericalangle KAO = 90^\circ.$$

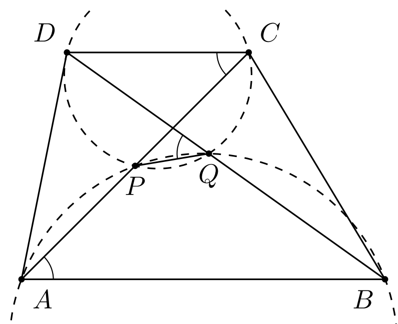
Stąd w poniższym rachunku otrzymujemy tezę zadania:

$$\sphericalangle KAB = \sphericalangle KAO - \sphericalangle BAO = 90^\circ - (90^\circ - \sphericalangle ACB) = \sphericalangle ACB.$$

Przykład 1 (XIII OMJ, zawody II stopnia)
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkty P i Q leżą odpowiednio na przekątnych AC i BD, przy czym

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle BQC.$$

Wykaż, że $\sphericalangle AQD = \sphericalangle BPC$.



Rozwiązanie
Zauważmy, że

$$\sphericalangle CPD = 180^\circ - \sphericalangle APD = 180^\circ - \sphericalangle BQC = \sphericalangle CQD$$

oraz punkty P i Q leżą po tej samej stronie prostej CD. Stąd wynika, że punkty C, D, P, Q leżą na jednym okręgu. Jeżeli punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży wewnątrz tego okręgu, to możemy napisać kolejno równości

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = \sphericalangle QPC = 180^\circ - \sphericalangle APQ.$$

Stąd wynika, że na czworokącie $ABQP$ można opisać okrąg. Jeżeli natomiast punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$ leży na zewnątrz okręgu przechodzącego przez punkty C, D, P, Q, to punkty B i P leżą po tej samej stronie prostej AQ i mamy

$$\sphericalangle ABQ = \sphericalangle QDC = 180^\circ - \sphericalangle QPC = \sphericalangle APQ,$$

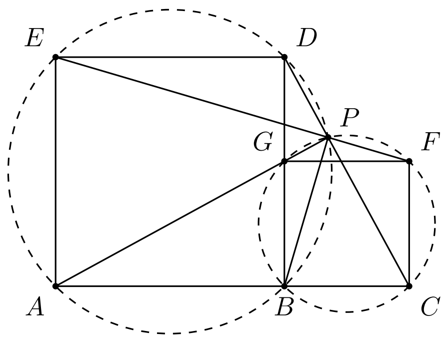
Wówczas na czworokącie $ABPQ$ można opisać okrąg. W obu przypadkach otrzymujemy równość $\sphericalangle AQB = \sphericalangle APB$, z której mamy

$$\sphericalangle AQD = 180^\circ - \sphericalangle AQB = 180^\circ - \sphericalangle APB = \sphericalangle BPC.$$

Jednym ze sposobów dowodzenia, że pewne trzy proste są współpękowe (tzn. przechodzące przez wspólny punkt), jest skonstruowanie pewnego punktu i wykazanie, że wszystkie dane proste przechodzą przez niego. Tę metodę ilustruje poniższy przykład.

Przykład 2

Dane są kwadraty $ABDE$ i $BCFG$ tak jak na rysunku. Wykaż, że proste AG, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.



Rozwiązanie

Oznaczmy różny od B punkt przecięcia okręgów opisanych na obu danych kwadratach jako P. Wykażemy, że proste AG, CD i EF przechodzą przez ten punkt, z czego wprost wyniknie teza.

Najpierw wykażemy, że punkty A, G i P są współliniowe. Skoro punkt P należy do okręgów opisanych na obu kwadratach, to

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle ADB = 45^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle BPG = \sphericalangle BCG = 45^\circ.$$

Stąd punkty A i G są widziane pod tym samym kątem z odcinka PB, co dowodzi postulowanej współliniowości.

Wykażemy teraz, że punkty C, P i D leżą na jednej prostej. Skoro punkt P leży na okręgach opisanych na obu kwadratach, to

$$\sphericalangle APD = \sphericalangle ABD = 90^\circ \quad \text{i} \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle GPC = \sphericalangle GFC = 90^\circ.$$

Stąd

$$\sphericalangle CPD = \sphericalangle APC + \sphericalangle APD = 180^\circ,$$

czyli punkty C, P i D leżą na jednej prostej.

Dowód tego, że punkty E, P i F są współliniowe jest analogiczny.

Zadania

1. Punkty P, Q i R należą odpowiednio do boków BC, CA i AB trójkąta ABC. Okręgi opisane na trójkątach BPR i CPQ przecinają się w punktach P i S, przy czym punkt S leży wewnątrz trójkąta ABC. Wykaż, że na czworokącie $ARSQ$ można opisać okrąg.

2. Pięciokąt $ABCDE$ wpisany jest w okrąg. Wykaż, że dwusieczne kątów $\sphericalangle ACB$, $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle AEB$ przecinają się w jednym punkcie.

3. Sześciokąt $ABCDEF$ wpisany jest w okrąg, a jego przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P. Wykaż, że zachodzi równość $\sphericalangle AFB + \sphericalangle CED = \sphericalangle APB$.

4. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie E. Wykaż, że $\sphericalangle CEB = \sphericalangle CSB$.

5. Na bokach BC i AC trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano po zewnętrznej stronie kwadraty $BCFE$ i $ACGH$. Udowodnij, że proste AF, BG i EH przecinają się w jednym punkcie.

6. (IX OMG, zawody II stopnia)
W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB, a punkt E jest środkiem odcinka CD. Wykaż, że jeżeli prawdziwa jest równość $\sphericalangle CAE = \sphericalangle BCD$, to $AC = CD$.

7. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Niech H będzie punktem przecięcia jego wysokości. Niech H' będzie punktem symetrycznym do punktu H względem prostej AB, zaś H'' – punktem symetrycznym do punktu H względem środka odcinka AB. Wykaż, że na pięciokącie $AH'H''BC$ można opisać okrąg.

8. Na trójkącie równoramiennym ABC, w którym $AC = BC$ opisano okrąg. Poprowadzono prostą styczną k do tego okręgu w punkcie A. Niech punkt D leży na odcinku AB. Punkt E niech leży na prostej k tak, by $AE = BD$ oraz, aby punkt ten leżał po tej samej stronie prostej AB, co punkt C. Udowodnij, że $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DCB$.

9. Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D i E leżące odpowiednio na bokach BC i AC. Niech F będzie punktem przecięcia prostych AD i BE. Znajdź miarę kąta $\sphericalangle ACB$, wiedząc że $ED = \frac{1}{2}AB$ oraz, że na czworokątach $CDFE$ i $ABDE$ można opisać okręgi.

10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Punkt G leży wewnątrz tego trójkąta, tak, że proste CG i AB są do siebie prostopadłe. Prosta BG przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D, różnym od punktu B. Niech P będzie dowolnym punktem na tym łuku BC okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu A. Okrąg opisany na trójkącie DGP przecina prostą CG w punkcie E, różnym od punktu G. Prosta EP przecina okrąg opisany na trójkącie ABC ponownie w punkcie W. Wykaż, że odcinek AW jest średnicą tego okręgu.

19 Układy równań

Rozwiązać układ równań to znaczy znaleźć wszystkie pary (tudzież trójki, czwórki, ...) liczb, które spełniają każdą z danych równości. Aby rozwiązać układy równań pojawiające się w szkole, wystarczy najczęściej zastosować metodę podstawień lub przeciwnych współczynników. W zadaniach nieco trudniejszych, często konieczne będzie użycie bardziej pomysłowych metod, które nierzadko powiązane będą z technikami opisanymi w poprzednich rozdziałach.

Przykład 1 (VI OMG, zawody I stopnia)
Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 + x(y-4) = -2 \\ y^2 + y(x-4) = -2. \end{cases}$$

Rozwiązanie
Odejmijmy równania stronami – pozwoli to pozbyć się wyrazów xy oraz -2, a także wykorzystać wzór na różnicę kwadratów. Mamy

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 4x + 4y &= 0, \\ x^2 - y^2 &= 4x - 4y, \\ (x-y)(x+y) &= 4(x-y). \end{aligned}$$

Zauważmy, że powyższe równanie ma po obu stronach czynnik $(x-y)$. Dobrym pomysłem wydaje się podzielenie przez niego stronami. Jednak, aby móc to zrobić musimy rozpatrzyć co się stanie, gdy $x - y = 0$, czyli $x = y$. Wówczas pierwsze równanie ma postać

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 4x &= -2, \\ 2x^2 - 4x + 2 &= 0, \\ 2(x-1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z powyższego równania otrzymujemy, że $x = 1$, co w połączeniu z założeniem, że $x = y$, daje rozwiązanie $(x, y) = (1, 1)$. Potwierdza to bezpośrednie podstawienie do wyjściowego układu.

Przyjmijmy teraz, że $x \neq y$. Wówczas możemy podzielić równanie $(x-y)(x+y) = 4(x-y)$ stronami przez $(x-y)$, uzyskując $x+y = 4$. To oznacza, że $y-4 = -x$. Po wstawieniu tego do pierwszej równości mamy $x^2 - x^2 = -2$, czyli $0 = -2$ – sprzeczność.

Ostatecznie, jedynym rozwiązaniem jest para $(1, 1)$.

Uwaga
Zawsze po rozwiązaniu układu równań należy sprawdzić, czy otrzymane rozwiązanie istotnie spełnia każde z równań układu. Dodawanie i odejmowanie stronami nie jest bowiem przekształceniem równoważnym. Taka sytuacja miała miejsce w przykładzie wyżej.

Przykład 2 (II OMG, zawody II stopnia)
Wyznacz wszystkie trójki (a, b, c) liczb rzeczywistych spełniających układ równań

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 23 \\ a + 2b + 4c = 22. \end{cases}$$

Rozwiązanie
Intuicją, która doprowadza do rozwiązania tego zadania jest doszukiwanie się wzorów skróconego mnożenia. Odejmijmy od pierwszego równania drugie pomnożone uprzednio stronami przez 2.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - 2a - 4b - 8c &= -21, \\ (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 8c + 16) &= 0, \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-4)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Suma kwadratów jest równa 0 tylko, gdy każdy ze składników jest równy 0, więc $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$. Podstawiając te wartości do pierwszego równania otrzymamy

$$23 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21,$$

czyli ta trójka nie spełnia pierwszego równania. Jak pokazało sprawdzenie, dany w zadaniu układ nie ma rozwiązań.

Zadania

1. Znajdź wszystkie liczby rzeczywiste x, y dla których zachodzą równości

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

2. Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2+2y+1=0 \\ y^2+2z+1=0 \\ z^2+2x+1=0. \end{cases}$$

3. Znajdź wszystkie trójki liczb rzeczywistych (a,b,c), które spełniają układ równań

$$\begin{cases} ab=c \\ bc=a \\ ca=b. \end{cases}$$

4. Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2019 \\ xy+yz+zx=2019. \end{cases}$$

5. Znajdź wszystkie pary liczb nieujemnych spełniających układ równań

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

6. (II OMG, zawody III stopnia)
Wyznacz wszystkie trójki (a,b,c) liczb rzeczywistych spełniające układ równań

$$\begin{cases} ab=a+b \\ bc=b+c \\ ca=c+a \end{cases}$$

7. Rozwiąż układ w niezerowych liczbach rzeczywistych x, y

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y^2 + 1 \\ y + \frac{1}{y} = x^2 + 1. \end{cases}$$

8. (XIII OMJ, zawody II stopnia)
Wyznacz wszystkie trójki (x, y, z) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} x - yz = 1 \\ xz + y = 2 \end{cases}$$

9. Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} & = y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} & = z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} & = x. \end{cases}$$

10. Rozwiąż następujący układ równań w liczbach rzeczywistych

$$\begin{cases} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 + 2 = \frac{x+y}{2}. \end{cases}$$

20 Potęgi

Liczba, którą można przedstawić w postaci a^k, dla liczb całkowitych a, k, przy czym $k \geqslant 1$, to *potęga* liczby całkowitej o wykładniku naturalnym. Rozwiązując zadania o potęgach liczb całkowitych, warto pamiętać o wzorach skróconego mnożenia i poniższych faktach.

Twierdzenie 1

Jeśli liczby a i b są kwadratami liczb całkowitych, to liczba ab również jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód

Skoro a, b są kwadratami liczb całkowitych, to możemy zapisać, że $a = x^2$ i $b = y^2$ dla pewnych liczb całkowitych x, y. Wówczas

$$ab = x^2y^2 = (xy)^2,$$

co dowodzi, że ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Twierdzenie 2

Dane są dodatnie liczby całkowite a, b, k, dla których zachodzi równość

$$a^2 \cdot k = b^2.$$

Wówczas k jest kwadratem liczby całkowitej.

Dowód

Rozpatrzmy dowolną liczbę pierwszą p. Zapiszmy a, b i k jako

$$a = p^\alpha a_0, \quad b = p^\beta b_0, \quad \text{oraz} \quad k = p^\gamma k_0,$$

gdzie a_0, b_0 i k_0 są liczbami całkowitymi niepodzielnymi przez p. Na mocy danej równości mamy

$$p^{2\alpha+\gamma} \cdot a_0^2 k_0 = p^{2\beta} \cdot b_0^2.$$

Liczby $a_0^2 k_0$ i b_0^2 są niepodzielne przez p. Stąd wykładniki przy p w rozkładzie prawej i lewej strony na czynniki pierwsze wynoszą odpowiednio $2\alpha+\gamma$ i 2β. Skoro zachodzi równość, to powyższe wykładniki również muszą być sobie równe, czyli $2\alpha+\gamma=2\beta$, a stąd

$$\gamma = 2(\beta-\alpha).$$

Wykazaliśmy, że γ jest liczbą parzystą. Innymi słowy dla dowolnej liczby pierwszej p wykładnik przy niej w rozkładzie liczby k na czynniki pierwsze jest liczbą parzystą. Możemy więc zapisać, że

$$k = p_1^{2\gamma_1} p_2^{2\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{2\gamma_t} = \left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_t^{\gamma_t}\right)^2,$$

dla pewnych liczb pierwszych p_1, p_2, ... ,p_t i liczb naturalnych γ_1, γ_2, ..., γ_t. Z powyższej równości wprost wynika to, że k jest kwadratem liczby całkowitej.

Zauważmy, że z powyższego twierdzenia wynika, że jeśli iloraz dwóch kwadratów liczb całkowitych $\frac{a^2}{b^2}$ jest liczbą całkowitą, to również będzie on kwadratem liczby całkowitej.

Fakt

Dane są liczby całkowite n i k, dla których zachodzą nierówności

$$(n+1)^2 > k > n^2.$$

Wówczas liczba k nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Przykład 1 (X OMG, zawody III stopnia)

Dane są takie dodatnie liczby całkowite a, b, takie że liczby

$$a^2+2b+1 \quad \text{oraz} \quad b^2+2a+1$$

są kwadratami pewnych liczb naturalnych. Wykaż, że $a=b$.

Rozwiązanie

Przypuśćmy nie wprost, że liczby a i b są różne. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a>b$. Zauważmy, że zachodzą nierówności

$$(a+1)^2 = a^2+2a+1 > a^2+2b+1 > a^2.$$

Stąd liczba a^2+2b+1 znajduje się pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami liczb całkowitych, a więc sama nie może nim być, zgodnie z faktem wyżej. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $a=b$.

Przykład 2 (XIII OMJ, zawody III stopnia)
Dodatnie liczby nieparzyste a, b mają tę własność, że liczba $a^b b^a$ jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że liczba ab jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie
Zauważmy, że
$$a^{b-1}b^{a-1} = \left(a^{\frac{b-1}{2}}b^{\frac{a-1}{2}}\right)^2.$$
Skoro liczby a, b są nieparzyste, to liczby $\frac{a-1}{2}$ oraz $\frac{b-1}{2}$ są liczbami całkowitymi. Zatem na mocy powyższej równości liczba $a^{b-1}b^{a-1}$ jest kwadratem liczby całkowitej. Zauważmy, że zachodzi równość
$$a^{b-1}b^{a-1} \cdot ab = a^b b^a.$$
Wiemy, że liczby $a^{b-1}b^{a-1}$ oraz $a^b b^a$ są kwadratami liczb całkowitych, a więc na mocy Twierdzenia 2 liczba ab również jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadania

1. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Udowodnij, że liczba $n^2 + n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

2. Dane są liczby całkowite a, b. Udowodnij, że jeśli liczba $a^2 - b^2$ jest parzysta, to jest podzielna przez 4.

3. Dane są takie cztery dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, że iloczyn dowolnych trzech z nich jest kwadratem liczby całkowitej. Wykaż, że każda z tych liczb jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Dane są liczby pierwsze p, q. Udowodnij, że co najwyżej jedna spośród liczb $p^2 + q$, $q^2 + p$ jest kwadratem liczby całkowitej.

5. Rozwiąż równanie $x^2 - 3x + 2 = y^2 + 2y$ w dodatnich liczbach całkowitych x, y.

6. (VIII OMG, zawody II stopnia)
Wyznacz wszystkie pary liczb pierwszych (p,q), dla których liczba $p^2 + pq + q^2$ jest kwadratem liczby całkowitej.

7. Na tablicy napisanych jest 2019 dodatnich liczb całkowitych, których iloczyn jest 2019 potęgą liczby całkowitej. Niech k będzie największą napisaną liczbą. Wykaż, że z tablicy można tak zetrzeć jedną liczbę albo dopisać jedną liczbę mniejszą od k, by iloczyn liczb na tablicy po tej operacji był potęgą liczby całkowitej o wykładniku nie mniejszym niż 2018.

8. (XII OMJ, zawody III stopnia)
Dane są takie dodatnie liczby całkowite a i b, że każda z liczb

$$ab \quad \text{oraz} \quad (a+1)(b+1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, dla której liczba $(a+n)(b+n)$ jest kwadratem liczby całkowitej.

9. Dodatnie liczby całkowite a, b, c spełniają równość

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = abc\left(a^3 + b^3 + c^3\right).$$

Udowodnij, że iloczyn pewnych dwóch z liczb a, b, c jest kwadratem liczby całkowitej.

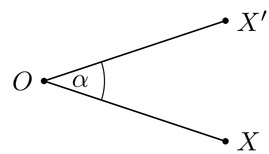
10. Dane są liczby pierwsze p, q oraz dodatnia liczba całkowita n. Udowodnij, że jeśli liczba $p^2 + q$ jest kwadratem liczby całkowitej, to liczba $q^2 + p^n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

11. Rozstrzygnij, czy istnieje taki podzbiór zbioru liczb całkowitych, który ma 2020 elementów oraz taki, że suma elementów każdego jego niepustego podzbioru nie jest potęgą liczby całkowitej o wykładniku będącym liczbą całkowitą większą od 1.

21 Obroty

Obrotem wokół punktu O o kąt skierowany α nazywamy takie przekształcenie, które punktowi X przyporządkowuje taki punkt X', że

$$OX = OX' \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle XOX' = \alpha.$$

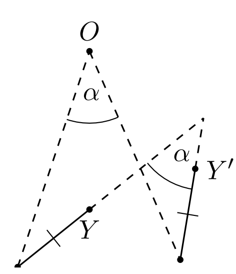


Punkt X' będziemy nazywać *obrazem* punktu X w tym przekształceniu. Powiemy też, że punkt X *przechodzi* na punkt X'.

W powyższej definicji użyto pojęcia *kąta skierowanego*. Jeżeli jego miara jest dodatnia, to mamy na myśli obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a jeśli miara jest ujemna – to przyjmujemy kierunek obrotu w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Na przykład obrót o kąt $-30°$ to jest obrót o $30°$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara. W rozwiązaniach zadań będziemy zawsze podawać, w którą stronę jest dokonywany obrót.

Fakt

Punkty X' oraz Y' są obrazami punktów X, Y w obrocie o kąt α wokół punktu O. Wówczas $X'Y' = XY$ oraz kąt między prostymi $X'Y'$ i XY wynosi α.



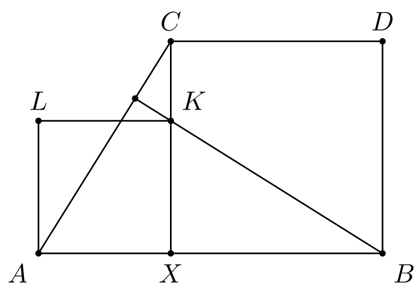
Część z poniższych przykładów i zadań można rozwiązać, nie korzystając z własności obrotów, jednak zachęcamy do przećwiczenia tej właśnie metody. Pomaga ona w nowy sposób spojrzeć na zadania geometryczne i wykształcić umiejętność dostrzegania przekształceń konfiguracji danej w zadaniu, przydatną w rozwiązywaniu trudniejszych problemów na poziomie Olimpiady Matematycznej. W podpowiedziach do zadań napisano jaki obrót warto rozważyć.

Przykład 1

Dane są kwadraty $AXKL$ i $BXCD$, takie że punkt X leży wewnątrz odcinka AB oraz oba kwadraty leżą po tej samej stronie odcinka AB. Wykaż, że proste AC oraz BK są prostopadłe.

Rozwiązanie

Zauważmy, że $\sphericalangle BXC = 90°$ i $BX = CX$. Rozpatrzmy więc taki obrót wokół punktu X o $90°$, aby punkt B przeszedł na punkt C.



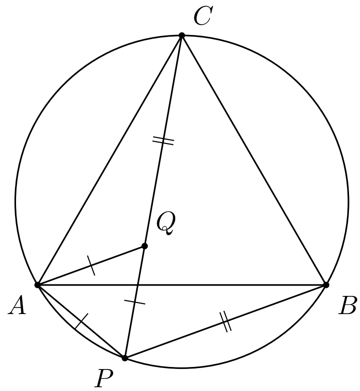
Możemy zauważyć również, że $\sphericalangle AXK = 90°$ i $AX = KX$. Stąd punkt K przejdzie na punkt A. A więc odcinek BK przejdzie na odcinek CA. Zauważamy, że obrót był o kąt $90°$, czyli na mocy Faktu proste BK i CA są prostopadłe.

Przykład 2

Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt P leżący na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykaż, że zachodzi równość $CP = AP + BP$.

Rozwiązanie

Rozważmy obrót wokół wierzchołka A przekształcający punkt B w punkt C. Niech obrazem punktu P będzie punkt Q.



Trójkąt ABP przechodzi na trójkąt ACQ, skąd możemy wywnioskować, że zachodzą równości

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle QCA \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle APB = \sphericalangle AQC.$$

Wówczas, skoro punkty A, P, B, C leżą na jednym okręgu, to

$$\sphericalangle QCA = \sphericalangle PBA = \sphericalangle PCA,$$

a stąd punkty Q, C, P są współliniowe.

Zauważmy, że skoro punkt P przechodzi przy rozpatrywanym obrocie na punkt Q, to kąt $\sphericalangle PAQ$ jest równy kątowi tego obrotu:

$$\sphericalangle PAQ = \sphericalangle BAC = 60°.$$

Łącząc powyższą równość z faktem, że $AP = AQ$ wnioskujemy, że trójkąt APQ jest równoboczny. Stąd mamy

$$CP = CQ + QP = CQ + AP = BP + AP.$$

Uwaga
W powyższym rozwiązaniu wykazaliśmy, że jeśli wykonujemy obrót o kąt 60°, to dowolny punkt, jego obraz oraz środek tego obrotu tworzą trójkąt równoboczny.

Zadania

1. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na jego bokach zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne ACE i BCD. Udowodnij, że $AD = BE$.

2. Dany jest kwadrat $ABCD$. Punkt O jest środkiem symetrii tego kwadratu. Punkt E należy do boku CD. Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów B i D na prostą AE. Udowodnij, że trójkąt OPQ jest prostokątny równoramienny.

3. Dane są kwadraty $ABCD$ oraz $AKLM$. Wykaż, że środkowa trójkąta DAK poprowadzona z punktu A jest prostopadła do prostej BM.

4. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkty M i N leżące odpowiednio na odcinkach BC i CD, przy czym obwód trójkąta CMN jest równy połowie obwodu kwadratu. Udowodnij, że $\sphericalangle MAN = 45°$.

5. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkty M i N leżące odpowiednio na odcinkach BC i CD. Wykaż, że jeżeli zachodzi równość $\sphericalangle BAM = \sphericalangle MAN$, to $AN = BM + DN$.

6. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz punkt P w jego wnętrzu. Wykaż, że z odcinków PA, PB, PC można zbudować trójkąt.

7. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkt P wewnątrz niego. Określamy proste l_A, l_B, l_C, l_D przechodzące odpowiednio przez punkty A, B, C, D, przy czym: prosta l_A jest prostopadła do prostej PB, prosta l_B jest prostopadła do prostej PC, prosta l_C jest prostopadła do prostej PD, a prosta l_D jest prostopadła do prostej PA. Wykaż, że proste l_A, l_B, l_C, l_D przecinają się w jednym punkcie.

8. (XI OMG, zawody III stopnia)
Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Punkt P leży na krótszym łuku AB okręgu opisanego na tym trójkącie. Punkt M jest środkiem odcinka AC. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem punktu M. Wykaż, że $BQ = PQ$.

9. Dany jest trójkąt ABC, na którego bokach (na zewnątrz) zbudowano trójkąty równoboczne $A'BC, AB'C, ABC'$. Punkty P i Q są odpowiednio środkami odcinków $B'C'$ oraz $A'C'$. Udowodnij, że trójkąt CPQ jest równoboczny.

10. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, przy czym $BC = CD$, $DE = EA$ oraz kąty przy wierzchołkach C i E są proste. Wykaż, że z odcinków AC, CE, EB można zbudować trójkąt.

22 Niezmienniki

Gdy analizujemy pewne przekształcenie, warto znaleźć taką własność, która przy jego wykonywaniu nie zmienia się.

Przykład 1

Yeti ma 17 żółtych skarpetek, 15 czerwonych i 13 niebieskich. Dzięki swojej magicznej mocy może dowolnie wiele razy zamienić dwie różne skarpetki na parę skarpetek trzeciego koloru. Czy po pewnej liczbie zamian może uzyskać wszystkie skarpetki w jednym kolorze?

Rozwiązanie

Zastanówmy się, jak się zmienia różnica między liczbą żółtych skarpetek, a liczbą czerwonych skarpetek.

- Jeśli Yeti zamieni jedną żółtą i jedną czerwoną w dwie niebieskie, to ta różnica się nie zmieni.
- Gdy zamieni jedną żółtą i jedną niebieską na dwie czerwone, to różnica zmniejszy się o 3
- Jak zamieni jedną czerwoną i jedną niebieską na dwie żółte, to ta różnica zwiększy się o 3.

Stąd wniosek, że reszta z dzielenia badanej różnicy przez 3 jest zawsze stała. Łatwo zauważyć, że na początku wynosi ona $17-15=2$. W takim razie będzie po dowolnej liczbie zamian dawać resztę 2 z dzielenia przez 3.

Zobaczmy zatem, ile wynosi różnica w sytuacji, gdy wszystkie skarpetki są tego samego koloru. Jeśli jest to niebieski, to 0, jeśli żółty, to 45, a jeśli czerwony, to -45. We wszystkich przypadkach ta różnica jest podzielna przez 3. Stąd wnioskujemy, że otrzymanie sytuacji, w której są skarpetki tylko jednego koloru nie jest możliwe.

W powyższym zadaniu wykazaliśmy, że reszta z dzielenia przez 3 różnicy między liczbą żółtych skarpetek a liczbą czerwonych skarpetek nie zmieni się, gdy będą wykonywane dozwolone zamiany. Taką własność nazywamy *niezmiennikiem*. Wykazaliśmy, że ta reszta ma inną wartość w stanie początkowym i w stanie pożądanym, więc stan pożądany nie może zostać otrzymany. Tego typu rozumowanie jest bardzo powszechne w zadaniach olimpijskich.

Niekiedy zdarza się, że pewne przekształcenia zmieniają pewną własność tylko w określony sposób – np. pewna liczba wskutek wykonywania ruchów tylko rośnie lub tylko maleje. Takie własności nazywamy *półniezmiennikami*.

Przykład 2

W każdym polu planszy 100×100 zapisano pewną liczbę całkowitą. W każdym ruchu możemy wybrać pewną kolumnę lub wiersz i zmienić znak każdej liczby, która się w nim znajduje. Wykaż, że możemy tak wykonywać ruchy, aby w pewnym momencie suma liczb w każdej z kolumn i w każdym z wierszy była nieujemna.

Rozwiązanie

Rozpatrzmy jako półniezmiennik sumę wszystkich liczb w tablicy. Będziemy wykonywać tylko takie ruchy, które zwiększają tę wartość. Gdybyśmy mogli wykonywać takie ruchy bez ograniczeń, to oznaczałoby, że wartość analizowanego półniezmiennika mogłaby urosnąć do dowolnie dużych wartości. Oczywiście nie jest to możliwe, gdyż jego wartość jest ograniczona z góry przez sumę wartości bezwzględnych wszystkich zapisanych w tablicy liczb.

Wnioskujemy stąd, że w pewnym momencie nie będzie możliwe wykonanie żadnego ruchu, który by zwiększył sumę wszystkich liczb w tablicy. Gdyby suma liczb zapisanych w pewnej kolumnie lub w pewnym wierszu była ujemna, to zmieniając ich znak, można by zwiększyć ich sumę – co przeczy powyższemu założeniu. Otrzymana sprzeczność dowodzi tego, że suma liczb w każdej kolumnie i w każdym wierszu jest nieujemna.

Zadania

1. Czy w wyrażeniu $1+2+\ldots+1017$ można zmienić niektóre znaki $+$ na $-$ w taki sposób, by w wyniku otrzymać zero?

2. Szachownica 2020×2020 jest wypełniona znakami „+” i „–” w taki sposób, że dokładnie jedno pole zawiera znak „–”. Dozwolone są zmiany wszystkich znaków na przeciwne na dowolnej linii pionowej lub poziomej oraz na głównej przekątnej. Czy wykonując takie operacje, można otrzymać szachownicę z samymi plusami?

3. Na okręgu napisano n dodatnich liczb całkowitych. Następnie pomiędzy każde dwie sąsiednie liczby wpisano ich maksimum, a początkowe n liczb zmazano. Postępowanie to było kontynuowane. Wykaż, że po pewnej liczbie takich operacji otrzymano n równych liczb.

4. Na szachownicy 2019×2021 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Każdy pionek przestawiono na jedno z pól sąsiadujących z tym, na którym stał. Czy jest możliwe, że po takim przestawieniu nadal na każdym polu stoi pionek?

5. Na tablicy napisano liczbę 2020!, czyli $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2020$. W każdym ruchu Yeti ściera zapisaną liczbę z tablicy i zastępuje ją sumą jej cyfr, aż otrzyma liczbę jednocyfrową. Jaką liczbę otrzyma Yeti?

6. Na tablicy napisano liczby $1, 2, \ldots, 2019$. W jednym ruchu możemy zetrzeć dwie z nich – nazwijmy je a, b – i wpisać w ich miejsce liczbę $ab+a+b$. Ile jest różnych możliwych wartości, które możemy osiągnąć na końcu, gdy zostanie tylko jedna liczba?

7. Dana jest szachownica 100×100. Na każdym polu leży kamień. W jednym ruchu możemy wybrać takie trzy różne pola A, B i C leżące w jednej kolumnie lub w jednym wierszu, że A i B oraz B i C mają wspólne brzegi. Jeśli na polach A i C jest niezerowa liczba kamieni, to możemy zabrać po jednym z obu tych pól i przełożyć je na pole B. Rozstrzygnij, czy można, wykonując takie ruchy, przełożyć wszystkie kamienie na jedno pole.

8. Dane są punkty $A=(0,0)$, $B=(0,1)$ i $C=(1,0)$. W danej chwili możemy zamienić jeden z tych punktów na jego obraz w symetrii względem innego spośród nich. Rozstrzygnij, czy można w ten sposób otrzymać trójkąt ABC, którego współrzędne wierzchołków to $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ (niekoniecznie w kolejności A, B, C).

9. Pewna planeta podzielona jest na kraje, przy czym każdy z nich jest w „jednym kawałku". W każdym z nich obowiązuje monarchia lub republika. Jeśli większość sąsiadów danego kraju ma inny ustrój niż on, to kraj ten jest zagrożony rewolucją. Pozostałe kraje są stabilne. Każdej nocy w dokładnie jednym kraju zagrożonym rewolucją, ta rewolucja wybucha i ustrój zmienia się na przeciwny. Wykaż, że po pewnym czasie na tej planecie wszystkie kraje będą stabilne.

10. Na drucie siedzi 2019 wróbli. Co sekundę pewne dwa sąsiednie z nich zamieniają się miejscami. Czy jest możliwe, żeby po pewnej parzystej liczbie sekund okazało się, że wróble siedzą na drucie w dokładnie odwrotnej kolejności niż na początku?

23 Kongruencje

Operacja wykonywania dzielenia z resztą powinna być Czytelnikowi dobrze znana. Zastanówmy się dokładniej czym ona w istocie jest.

Definicja 1

Dana jest liczba całkowita a i dodatnia liczba całkowita n. Wówczas powiemy, że a daje resztę r przy dzieleniu przez n jeśli istnieje taka liczba całkowita k, że

$$a = k \cdot n + r$$

oraz $0 \leqslant r < n$.

Uwaga

Warto zastanowić się dlaczego dla ustalonych liczb a, n istnieje dokładnie jedna liczba całkowita r spełniająca warunki wyżej?

Spróbujmy zilustrować tę formalną definicję na przykładzie. Możemy stwierdzić, że liczba 11 daje resztę 2 przy dzieleniu przez 3. Istotnie – zachodzi równość

$$11 = 3 \cdot 3 + 2.$$

Liczba 23 również daje resztę 2 z dzielenia przez 3, gdyż

$$23 = 7 \cdot 3 + 2.$$

Obie liczby: 11 i 23 dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Zauważmy, że różnica $23 - 11 = 12$ jest liczbą podzielną przez 3. Nie jest to przypadek, o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1

Liczby całkowite a oraz b dają tę samą resztę z dzielenia przez dodatnią liczbę całkowitą n wtedy i tylko wtedy, gdy różnica $a - b$ jest podzielna przez n.

Dowód

Skoro liczby a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez n, to możemy zapisać

$$a = k_a \cdot n + r \quad \text{oraz} \quad b = k_b \cdot n + r,$$

dla pewnych liczb całkowitych k_a, k_b. Mamy

$$a - b = (k_a n + r) - (k_b n + r) = (k_a - k_b)n,$$

co dowodzi tego, że liczba $a - b$ jest podzielna przez n.

Dowód w drugą stronę pozostawiamy Czytelnikowi.

Definicja 2

Jeśli liczby całkowite a i b dają tę samą resztę w dzieleniu przez dodatnią liczbę całkowitą n, to zapiszemy

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Powyższą zależność czytamy jako „a przystaje do b modulo n" oraz nazywamy *kongruencją* lub *przystawaniem*.

Na przykład wiemy, że liczby 11 i 23 dają tę samą resztę z dzielenia przez 3, więc możemy zapisać, że

$$11 \equiv 23 \pmod{3}.$$

Teraz przystąpimy do udowodnienia najważniejszych własności kongruencji. W istocie są one niezwykle intuicyjne i pozwalają na głębokie zrozumienie istoty operowania na resztach z dzielenia.

Twierdzenie 2

Dana jest dodatnia liczba całkowita n oraz liczby całkowite a, b, c, d, dla których zachodzą przystawania

$$a \equiv b \pmod{n} \quad \text{oraz} \quad c \equiv d \pmod{n}.$$

Wówczas zachodzą przystawania

$$\begin{gathered} a + c \equiv b + d \pmod{n}, \\ a - c \equiv b - d \pmod{n}, \\ ac \equiv bd \pmod{n}. \end{gathered}$$

Dowód

Zapiszmy

$$a = k_a n + r_1, \;\; b = k_b n + r_1, \;\; c = k_c n + r_2, \;\; d = k_d n + r_2,$$

dla pewnych liczb całkowitych $k_a, k_b, k_c, k_d, r_1, r_2$. Wówczas mamy

$$a + c = (k_a + k_c)n + (r_1 + r_2),$$

$$b + d = (k_b + k_d)n + (r_1 + r_2).$$

Stąd obie z liczb $a + c$ i $b + d$ dają tę samą resztę z dzielenia przez n co $r_1 + r_2$, z czego wynika, że $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

Podobnie wykazujemy, że liczby $a - c$ i $b - d$ dają tę samą resztę z dzielenia przez n co $r_1 - r_2$, skąd $a - c \equiv b - d \pmod{n}$.

Zauważmy, że

$$ac = (k_a n + r_1)(k_c n + r_2) = (k_a k_c n + k_a r_2 + k_c r_1)n + r_1 r_2.$$

$$bd = (k_b n + r_1)(k_d n + r_2) = (k_b k_d n + k_b r_2 + k_d r_1)n + r_1 r_2.$$

Stąd liczby ac i bd dają taką samą resztę jak $r_1 r_2$ z dzielenia przez n, czyli $ac \equiv bd \pmod{n}$.

Twierdzenie 3

Dane są takie liczby całkowite a, b oraz dodatnia liczba całkowita n, że zachodzi przystawanie

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas

$$a^k \equiv b^k \pmod{n}.$$

Dowód

Na mocy poprzedniego twierdzenia kongruencje można mnożyć stronami. Przemnażając k danych przystawań

$$a \equiv b \pmod{n},$$

przez siebie otrzymujemy tezę.

Przykład 1

Dana jest liczba całkowita a. Wykaż, że

$$a^2 \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{oraz} \quad a^2 \equiv 1 \pmod 3.$$

Rozwiązanie

Każda liczba całkowita daje resztę 0, 1 lub 2 z dzielenia przez 3. Rozpatrzmy więc każdy z tych trzech przypadków.

1. Jeśli $a \equiv 0 \pmod 3$, to $a^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \pmod 3$.
2. Gdy $a \equiv 1 \pmod 3$, to $a^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 3$.
3. Z kolei dla $a \equiv 2 \pmod 3$ mamy $a^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Uwaga

Prowadząc rozumowanie podobnie do przedstawionego wyżej uzasadnić można, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej daje przy dzieleniu przez 4 resztę 0 lub 1. Jest to to fakt używany często w rozwiązaniach zadań olimpijskich.

Przykład 2

Liczby całkowite a, b, c mają te własność, że liczby $ab-1$, $bc-1$ i $ca-1$ są podzielne przez pewną liczbę pierwszą p. Wykaż, że liczba

$$a^2+b^2+c^2-3$$

również jest podzielna przez p.

Rozwiązanie

Dane podzielności możemy zapisać równoważnie jako

$$ab \equiv 1 \pmod p, \quad bc \equiv 1 \pmod p, \quad ca \equiv 1 \pmod p.$$

Mamy

$$a^2 \equiv a^2 \cdot bc \equiv ab \cdot ac \equiv 1 \pmod p.$$

W sposób analogiczny wykazujemy, że $b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod p$. Stąd

$$a^2+b^2+c^2-3 \equiv 1+1+1-3 \equiv 0 \pmod p,$$

co należało wykazać.

Zadania

1. Wykaż, że dla każdej liczby całkowitej a jedna z liczb a^2, a^2-1 lub a^2-4 jest podzielna przez 8.

2. Wyznacz ostatnią cyfrę liczby $2^{100}+3^{100}$.

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite x, y spełniające równanie

$$x^2-3y^2=1001.$$

4. (V OMG, zawody III stopnia)
Dane są takie liczby całkowite $a, b, c>1$, że największy wspólny dzielnik liczb $a-1, b-1, c-1$ jest większy od 1. Udowodnij, że liczba $abc-1$ jest złożona.

5. Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej n i dowolnej liczby nieparzystej k liczba $2^k+(n-2)^k$ jest podzielna przez n.

6. (V OMG, zawody II stopnia)
Wyznacz wszystkie takie dodatnie liczby całkowite n, dla których obie liczby n^2+n+1oraz n^2+n+3 są pierwsze.

7. Wykaż, że nie istnieją takie dodatnie liczby całkowite a, b, k, dla których zachodzi równość

$$a^2+b^2=4^k.$$

8. Dane są liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Wiadomo, że dla dowolnej liczby całkowitej $99 \geqslant i \geqslant 1$ zachodzi równość

$$a_{i+1}=a_i^2-a_i+1.$$

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n>1$ istnieje co najwyżej jedna taka liczba t, że liczba a_t jest podzielna przez n.

9. Dana jest liczba pierwsza p oraz takie liczby a, b, c, d niepodzielne przez p, że liczby a^3+2b^3 oraz c^5+2d^5 są podzielne przez p. Uzasadnij, że istnieją takie liczby całkowite n, m, że liczba $n^{15}+2m^{15}$ jest podzielna przez p.

10. Znajdź wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych (n, m), dla których zachodzi równość $1!+2!+3!+\cdots+n!=m^2$.

Podpowiedzi

1. Trapezy równoramienne i równoległoboki

1. Udowodnij, że trójkąty AMB i CMD są przystające.

2. Zauważ, że łuki danego okręgu są równej długości wtedy i tylko wtedy, gdy cięciwy oraz kąty oparte na tych łukach są równej długości.

3. Zauważ, że jeśli trapez ma ramiona równej długości, to może być albo trapezem równoramiennym, albo równoległobokiem. Skorzystaj z własności trójkąta o kątach $30°, 60°, 90°$. Rozważ wszystkie przypadki.

4. Zauważ, że czworokąt $AKLM$ jest równoległobokiem.

5. Dorysuj taki punkt D na prostej AM, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem.

6. Dorysuj wysokości tego trapezu opuszczone z wierzchołków C i D. Zauważ, że powstanie prostokąt i dwa trójkąty prostokątne.

7. Skorzystaj z twierdzenia o linii środkowej. Udowodnij, że czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem.

8. Skorzystaj z faktu, że trapez równoramienny ma przekątne równej długości.

9. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku. Pokaż, że $BS = QS = DS$.

10. Dorysuj taki punkt X wewnątrz tego sześciokąta, że czworokąt $ABCX$ jest równoległobokiem.

2. Przekształcenia algebraiczne

1. Podnieś pierwszą z danych równości stronami do kwadratu.

2. Podnieś dane równości stronami do kwadratu.

3. Pomnóż wyjściową równość przez $a+b$ stronami.

4. Wykaż, że zachodzi równość

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$$

5. Dodaj wyrażenie ad do obu stron równości $ab = cd$.

6. Podstaw $x = a+c$, $y = b+d$.

7. Przemnóż daną równość przez $a+b+c$ stronami.

8. Przekształć wyjściowe równanie, aby otrzymać równość

$$a-b = \frac{b-c}{bc}.$$

9. Zauważ, że zachodzi równość

$$\frac{1}{(n-1)\cdot n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

10. Udowodnij, że zachodzi równość

$$(a-2)(b-2)(c-2) = 0.$$

3. Zasada szufladkowa Dirichleta

1. Niech szufladkami będą miesiące, a skarpetkami – osoby.

2. Ile jest szufladek i ile skarpetek trzeba wybrać, aby zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta pewne dwie znalazły się w tej samej szufladce?

3. Rozpatrz pary $\{1,16\},\{2,15\},...,\{8,9\}$.

4. Zauważ, że suma ocen ucznia jest liczbą całkowitą, która jest większa od 1 i mniejsza od 12.

5. Podziel prostokąt na 6 prostokątów o wymiarach 1×2, niech te prostokąty będą szufladkami.

6. Rozważ dowolne trzy punkty będące wierzchołkami trójkąta równobocznego o boku długości 1.

7. Zauważ, że wszystkie jeśli a i b są różnymi liczbami całkowitymi, że $\frac{a}{b} < 2$, to b nie może dzielić a.

8. Rozpatrz ciąg liczb $10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ldots$.

9. Niech szufladkami będą reszty z dzielenia przez 10. Rozważ przypadek, gdy jedna z szufladek jest pusta.

10. Jakie wartości przyjmuje wyrażenie $\frac{1}{1+a}$?
Przedziały też mogą być szufladkami.

4. Przystawanie trójkątów

1. Jest możliwe, że zachodzą dane równości, a dane trójkąty nie są przystające.

2. W pierwszych dwóch przypadkach udowodnij, że

$$\triangle CHA \equiv \triangle CHB.$$

W trzecim przypadku rozpatrz taki punkt K, aby S był środkiem odcinka CK. Wykaż, że trójkąty ASC i BSK są przystające.

3. Zauważ, że $\triangle AXP \equiv \triangle BYP$.

4. Wykaż, że $\triangle AMC \equiv \triangle DMB$.

5. Dorysuj wysokość CH danego trójkąta. Następnie oznacz rzuty prostokątne punktów X i Y na nią jako S i T. Następnie poszukaj trójkątów przystających.

6. Dorysuj środek odcinka DP.

7. Oznacz punkty styczności sfery wpisanej do ścian SAB, SBC, SCD, SDA jako X, Y, Z i T. Wykaż, że trójkąty SXB i SYB są przystające. Poszukaj innych par trójkątów przystających.

8. Wykaż że $AC = BD$.

9. Rozpatrz punkt symetryczny do rzutu M na AC względem prostej DM.

10. Rozpatrz takie punkty X i Y na zewnątrz trójkąta ABC, aby zachodziły przystawania

$$\triangle KCX \equiv \triangle CYL \equiv \triangle ABC.$$

5. Podzielności

1. Ponieważ 2 i 3 są różnymi liczbami pierwszymi, więc wystarczy wykazać, że liczba $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez 2 i 3.

2. Zauważ, że jeżeli $ab \,\big|\, a+b$, to $a \,\big|\, a+b$, więc $a \,\big|\, ,b$.

3. Zauważ, że $n^4-n^2=n^2(n-1)(n+1)$. Rozważ osobno przypadki, gdy n jest liczbą parzystą i gdy n jest liczbą nieparzystą.

4. Podstaw $m=n+1$.

5. Zauważ, że $\overline{abcab}=10010a+1001b+100c$ oraz że liczby 10010 i 1001 są podzielne przez 11. Wywnioskuj, że 11 dzieli $100c$.

6. Zauważ, że jeżeli $d \,\big|\, 175$ i $d \,\big|\, a$ to $d \,\big|\, b=175-a$. Wywnioskuj stąd, że 35 dzieli a i b.

7. Zauważ, że jeżeli $a+k \,\big|\, b+k$, to $a+k \,\big|\, b-a$.

8. Zauważ, że

$$4ab-1+2(a+b+1)=(2a+1)(2b+1).$$

Skorzystaj z tego, że liczba $a+b+1$ jest liczbą pierwszą.

9. Skorzystaj z faktu, że dodatnie dzielniki dowolnej potęgi dwójki są również potęgami dwójki.

10. Wykaż, że $a \,\big|\, b$ oraz zapisz $b=ak$.

6. Grafy

1. Postępuj podobnie jak w Przykładzie 1.

2. Rozpatrz dowolną osobę i jej znajomych. Wykaż, że pewni dwaj jej znajomi się znają.

3. Rozpatrz graf, którego wierzchołkami są ściany danego wielościanu. Dwa wierzchołki są połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy ściany im odpowiadające mają wspólną krawędź.

4. Jest to możliwe. Spróbuj skonstruować konfigurację o mniejszej liczbie osób, a następnie powiel ją tyle razy, by łącznie mieć 200 osób.

5. Niech A będzie dowolnym uczestnikiem przyjęcia. Udowodnij, że wówczas istnieje trójka uczestników, z których wszyscy są znajomymi A lub wszyscy nie są znajomymi A.

6. Przyjmij, że każdy z graczy wygrał dokładnie x meczów. Spróbuj obliczyć x.

7. Nie jest to możliwe. Zauważ, że jeśli wjedziemy do jakiegoś miasta, to musimy również z niego wyjechać, o ile nie jest to miasto początkowe ani końcowe naszej podróży.

8. Jeśli czerwone odcinki nie spełniają tej własności, to graf złożony z danych punktów i tylko czerwonych odcinków „rozpada się” na kilka niepołączonych części, między którymi są tylko niebieskie odcinki.

9. Dobrym pomysłem będzie podpisywanie wierzchołków liczbami po kolei – najpierw podpisujemy pierwszy wierzchołek, potem drugi, itd. Trzeba uzasadnić, że każdy wierzchołek można będzie podpisać pewną liczbą tak, aby warunek z zadania zachodził.

10. Wykaż, że istnieje taka grupa $n+1$ osób, że każda para osób z tej grupy się zna.

7. Pola

1. Wykaż, że zachodzi równość

$$[ABD] = [ABC].$$

2. Zauważ, że

$$[ABE] = [ABC].$$

3. Wykaż, że zachodzi równość

$$[ABED] = [ABC].$$

4. Skorzystaj z tego, że

$$[ABC] = [BCP] + [CAP] + [ABP].$$

5. Zauważ, że

$$[AMND] = [BMNC].$$

6. Skorzystaj z Twierdzenia 2. Następnie udowodnij że, jeśli $L \neq l$ i $M \neq m$ są niezerowymi liczbami rzeczywistymi, to jeśli $\frac{L}{M} = \frac{l}{m}$, to $\frac{L}{M} = \frac{l}{m} = \frac{L-l}{M-m}$.

7. Spróbuj udowodnić, że

$$[AECF] = [APF] + [AQE].$$

8. Oznacz $DE = x$, $CE = y$, zaś wysokości trójkątów BCD i ACD poprowadzone z wierzchołków B i A odpowiednio h i g. Zapisz założenia zadania za pomocą wyrażeń algebraicznych.

9. Zauważ, że pole wycinka kołowego zawierającego krótszy łuk $\widehat{BD}$ jest mniejsze niż pole trójkąta ABC. Skorzystaj ze wzoru na pole i obwód wycinka kołowego.

10. Skorzystaj z zadania **6.**

8. Liczby całkowite i wymierne

1. Zauważ, że skoro liczba $x+\frac{1}{x}$ jest liczbą całkowitą, to liczba $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ również będzie całkowita.

2. Zauważ, że zachodzi równość $(a+c)(b+d)=ab+bc+cd+da$.

3. Zauważ, że $a+b=bc-c=c(b-1)$.

4. Niech $p+400=a^2$. Przekształć to równanie, używając wzoru na różnicę kwadratów.

5. Oznacz $a+b=2k+1$, $b+c=2k+2$, $a+c=2k+3$. Z powyższych równości wylicz a.

6. Zauważ, że $xy-2x-3y+6=(x-3)(y-2)$.

7. Wykaż, że liczba $(a+b)^2$ jest wymierna.

8. Skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad \text{oraz} \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

9. Przyjmij $\frac{a+b\sqrt{2}}{b+c\sqrt{2}}=q$ dla pewnej liczby wymiernej q. Przekształć tę równość do postaci

$$a-qb=(qc-b)\sqrt{2},$$

a następnie skorzystaj z tego, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

10. Takie liczby istnieją.

11. Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka zwykłego $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi. Podstaw pod a, b, c i d pewne wyrażenia algebraiczne zmiennych p i q, tak, aby spełnić warunki zadania.

12. Przemnóż daną równość przez 4 stronami, poszukaj wzorów skróconego mnożenia.

9. Plansze

1. Zauważ, że klocki w kształcie domina pokrywają jedno pole białe i jedno pole czarne. Zbadaj, jakiego koloru pola przykrywa klocek drugiego rodzaju.

2. Pokoloruj planszę, jak zwykłą szachownicę.

3. Pokoloruj kwadrat 10×10 jak zwykłą szachownicę. Zauważ, że do pokrycia szachownicy potrzeba dokładnie 25 *T-klocków*.

4. Podziel szachownicę na 16 kwadratów 2×2.

5. Rozważ położenie *Z-klocka*, który pokrywa pewne pole narożne.

6. Pokoloruj jednostkowe trójkąty na biało i czarno, tak, aby każde dwa sąsiednie trójkąty były różnego koloru.

7. Pokoloruj planszę tak, aby każdy klocek przykrywał dokładnie jedno kolorowe pole.

8. Ponumeruj kolumny liczbami od 1 do 99. W każde pole wpisz resztę z dzielenia przez 5 numeru kolumny, w której leży to pole.

9. Niech dłuższe boki będą poziome. Wpisz w kolejne wiersze liczby

$$1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$$

10. Pokoloruj planszę tak, aby każdy klocek pokrywał dokładnie jedno kolorowe pole. Spróbuj „obrócić” to kolorowanie o 90°.

10. Twierdzenie Talesa

1. Skorzystaj z twierdzenia Talesa dla prostych AB i XY.
2. Przy użyciu twierdzenia Talesa wyraź długość odcinka XE za pomocą długości innych odcinków.
3. Wyznacz długości odcinków DE i FG w zależności od długości odcinka AB.
4. Zaznacz środek K przekątnej BD i skorzystaj z twierdzenia Talesa.
5. Udowodnij, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle PQR$.
6. Rozpatrz punkt przecięcia prostych AD i BC. Skorzystaj z twierdzenia Talesa.
7. Wykaż, że $AF = AB$.
8. Pokaż, że proste AD i CB są równoległe.
9. Zrzutuj punkty C, M, D na prostą AB.
10. Przedstaw ułamek $\frac{AX}{XB}$ jako iloraz długości innych odcinków.

11. Działania na pierwiastkach

1. Usuń niewymierności – rozszerz mianownik jednego z ułamków o $2+\sqrt{3}$, zaś mianownik drugiego — o $2-\sqrt{3}$.

2. Podnieś równanie stronami do kwadratu i zredukuj wyrazy podobne.

3. Zastanów się, czy istnieje taka liczba rzeczywista x, że zachodzi równość $\sqrt{x^2+1}=x$.

4. Usuń niewymierność z mianownika w każdym z ułamków.

5. Zauważ, że $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$.

6. Udowodnij, że $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$. Powyższą nierówność możesz podnieść stronami do kwadratu.

7. Przenieś $m+n$ na drugą stronę równania, a następnie podnieś je stronami do kwadratu. Pamiętaj, że możesz dzielić stronami przez mn.

8. Udowodnij, że $\sqrt{100^n+2}<10^n+\frac{1}{10^n}$.

9. Przemnóż wyjściową równość stronami przez $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

10. Zauważ, że każdy składnik jest nie mniejszy od $\frac{1}{\sqrt{2019}}$.

12. NWD i NWW

1. Podobnie jak w Przykładzie 1, skorzystaj z Twierdzenia.

2. Podstaw $a = dx$, $b = dy$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a,b)$.

3. Zauważ, że jeśli $a \geqslant b$ oraz $b \nmid a$, to $\mathrm{NWW}(a,b) > a$.

4. Zastosuj Twierdzenie i spróbuj dojść do podzielności, w której liczba n występuje tylko w pierwszej potędze.

5. Skorzystaj z podstawienia $a = dx, b = dy$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a,b)$.

6. Skorzystaj z podstawienia $a = ex, b = ey$, gdzie $e = \mathrm{NWD}(a,b)$. Zauważ, że jeśli $k^2 \,\Big|\, l^2$, to $k \,\Big|\, l$.

7. Wyraź założenie w postaci podzielności. Zauważ, że jeśli $k \mid l$ i $k, l > 0$, to $k \leqslant l$.

8. Skorzystaj z podstawienia $a = dx, b = dy$, gdzie $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Zauważ, że jeśli $k \,\Big|\, l$ i $k, l > 0$, to $k \leqslant l$.

9. Skorzystaj z Twierdzenia, by wyeliminować n^2.

10. Uprość wyrażenie dane w zadaniu za pomocą Twierdzenia.

13. Podwójne zliczanie

1. Co możesz powiedzieć o sumie liczb z jednej grupy?

2. Oszacuj liczbę par postaci (uczeń X, kółko na które uczęszcza uczeń X).

3. Przyporządkuj każdej ścianie liczbę jej boków. Jaka jest relacja pomiędzy sumą tych liczb, a liczbą krawędzi tego wielościanu?

4. Jaka jest relacja pomiędzy sumą liczb wpisanych w wierzchołki, a sumą liczb wpisanych w krawędzie?

5. Jakiego znaku jest suma liczb z całej tablicy?

6. Jaka jest relacja pomiędzy sumą liczb na wszystkich krawędziach do sumy liczb na krawędziach wychodzących z jednego wierzchołka?

7. Udowodnij, że suma sum liczb w kolumnach jest równa sumie sum liczb w wierszach.

8. Rozważ sumę wszystkich liczb z tablicy.

9. Wykaż, że suma liczb z każdego trójelementowego podzbioru dzieli się przez 3.

10. Zauważ, że jest dwanaście krawędzi, a liczby na krawędziach są nie większe niż 15 i nie mniejsze od 3.

14. Nierówność trójkąta

1. Rozważ punkt P powstający przez przecięcie przekątnych AC oraz BD.

2. Rozważ punkt P przecięcia prostych AC oraz BD.

3. Zauważ, że boki tego trójkąta muszą być długości a^{n+2}, a^{n+1}, a^n, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Skorzystaj z nierówności trójkąta.

4. Rozważ obraz F_1' punktu F_1 w symetrii względem prostej l oraz przecięcie prostej l z prostą $F_1'F_2$.

5. Rozważ punkt P będący środkiem odcinka AC, a także trójkąt MPN.

6. Niech promień danego okręgu wynosi r. Wówczas
$$AS = BS = DS = r.$$
Skorzystaj z dwóch nierówności trójkąta.

7. Niech punkty B' i D' będą odpowiednio obrazami punku C w symetriach względem punktów B i D.

8. Rozważ siatkę sześcianu.

9. Niech punkt D będzie środkiem tego łuku $\widehat{BC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu A. Znajdź długość odcinka MD i rozważ trójkąt AOM, gdzie punkt O to środek okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$.

10. Rozważ końce dowolnej średnicy koła z treści zadania, dla której istnieje taka liczba i, że A_i nie należy do tej średnicy.

15. Nierówności

1. Przemnóż strony nierówności przez $|x|$.

2. Przemnóż strony nierówności przez $(a+b)ab$.

3. Zauważ, że $abc \geqslant 3a$.

4. Podstaw $x = a - c$ i $y = c - b$.

5. Skorzystaj z tego, że $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.

6. Nierówność jest prawdziwa dla $n = 3$. Znajdź kontrprzykłady dla innych n.

7. Sprawdź, co można wywnioskować z warunku $b = c$.

8. Wymnóż wszystko, zredukuj wyrazy podobne.

9. Wykaż, że $a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2 \geqslant (a+b+c+d)^2$.

10. Zauważ, że $abc = ab + bc + ca = \frac{abc}{c} + \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b}$.

11. Wykaż, że zachodzi nierówność $(a+b)^2 \geqslant 4ab$.

12. Udowodnij, że $\sqrt{n^n m^m} \geqslant \sqrt{mn}^{\frac{m+n}{2}}$.

16. Zasada minimum i maksimum

1. Rozważ największą z wpisanych liczb. Jakie liczby mogą z nią sąsiadować?

2. Zauważ, że w dowolnym trójkącie rozwartokątnym naprzeciw kąta rozwartego leży najdłuższy jego bok.

3. Rozpatrz pole, w które wpisano najmniejszą liczbę. Wykaż, że w sąsiednie pola jest wpisana ta sama liczba.

4. Możesz rozumować nie wprost przyjmując, że nie istnieje taki rycerz. Co możesz wtedy powiedzieć o rycerzu, który wygrał największą liczbę pojedynków?

5. Rozpatrz taki trójkąt o różnokolorowych wierzchołkach, który ma najmniejsze pole.

6. Wykaż, że na tablicy zapisano co najwyżej jedną liczbę dodatnią i co najwyżej jedną liczbę ujemną.

7. Nazwijmy ciąg rycerzy $(A_1, A_2, ..., A_k)$ cyklem, jeśli A_1 wygrał z A_2, A_2 z A_3, ... i A_k z A_1. Rozważ najkrótszy cykl istniejący wśród rycerzy przy stoliku.

8. Rozważ takie rozwiązanie (x, y, z), by wartość wyrażenia $x + y + z$ była możliwie najmniejsza. Zauważ, że liczba x jest parzysta.

9. Rozważ trójkąt ABC o czerwonych wierzchołkach o największym polu. Przez każdy wierzchołek poprowadź prostą równoległą do przeciwległego boku.

10. Rozważ dwie planety o najmniejszej odległości między sobą. Z pozostałych wybierz kolejne dwie o najmniejszej odległości między sobą.

17. Liczby pierwsze i złożone

1. Przypuśćmy, że pewna liczba pierwsza nie jest takiej postaci. Co można powiedzieć o tej liczbie?

2. Zauważ, że każdą liczbę parzystą można przedstawić w postaci sumy dwójki i liczby parzystej.

3. Zauważ, że $p+q$ jest liczbą parzystą. Wykaż, że liczba $\frac{p+q}{2}$ jest liczbą złożoną.

4. Wykaż, że jeśli $n = ab$ dla pewnych liczb całkowitych $a > b \geqslant 1$, to postulowana podzielność zachodzi.

5. Załóżmy, że istnieją takie parami różne liczby pierwsze $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$, że

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \cdots + \frac{1}{p_k} = n.$$

Przemnóż obie strony równania przez $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$.

6. Zbadaj, jaki jest wykładnik dwójki i piątki w rozkładzie $50!$ na czynniki pierwsze.

7. Czy $p+q$ może dzielić się przez p? Wykaż, że $p \,\big|\, p+q+r$.

8. Spróbuj skonstruować w zależności od n takie d, że liczby

$$d+2, d+3, \ldots, d+(n+1)$$

są złożone.

9. Wykaż, że jedna z liczb p, q jest parzysta. Załóż, że $p = 2$. Zauważ, że wtedy $r^r > q^{q+1}$.

10. Rozpatrz zbiór liczb

$$S = \{0, a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a\}.$$

Wykaż, że każde jego dwa elementy dają różną resztę z dzielenia przez p.

18. Kąty i okręgi

1. Wykaż, że suma przeciwległych kątów rozważanego czworokąta równa jest $180°$.

2. Udowodnij, że dane dwusieczne przecinają się w punkcie, będącym środkiem tego łuku AB rozważanego okręgu, który nie zawiera pozostałych wierzchołków wyjściowego pięciokąta.

3. Zauważ, że $\sphericalangle APB = 180° - \sphericalangle BPC$. Skorzystaj z faktu, że kąty oparte na tym samym łuku mają równe miary.

4. Zauważ, że trapez $ABCD$ jest równoramienny.

5. Szukanym punktem okaże się punkt przecięcia okręgów opisanych na kwadratach, o których mowa w zadaniu.

6. Rozważ środek odcinka AC.

7. Udowodnij, że $\sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle ACB$.

8. Wykaż, że punkty A, D, C i E leżą na jednym okręgu.

9. Uzasadnij, że punkty D i E są spodkami wysokości opuszczonych odpowiednio z wierzchołków A i B.

10. Niech F będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Udowodnij, że punkty A, F, P i E leżą na jednym okręgu.

19. Układy równań

1. Podnieś strony pierwszego równania do kwadratu, a następnie odejmij od uzyskanego równania drugie równanie.

2. Dodaj strony wszystkich równań. Zwiń jedną stronę w sumę kwadratów, korzystając ze wzoru skróconego mnożenia.

3. Przemnóż wszystkie trzy równania stronami.

4. Odejmij równania stronami i przenieś wszystkie wyrażenia na jedną stronę. Zwiń jedną stronę równania w sumę kwadratów.

5. Wykaż, że $1 \geqslant x$ oraz $1 \geqslant y$.

6. Odejmij pierwsze dwa równania stronami. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias.

7. Zauważ, że

$$x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}.$$

Pomnóż równania stronami i wywnioskuj, że $xy=1$.

8. Podnieś równania stronami do kwadratu a następnie dodaj je do siebie.

9. Rozważ przypadki, w których pewna liczba równa jest 0. Dla pozostałych przypadków rozważ odwrotności danych równań.

10. Odejmij pierwsze dwa równania stronami.

20. Potęgi

1. Zauważ, że $n^2+n<(n+1)^2$.

2. Skorzystaj z tego, że $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

3. Wykaż, że liczba $abcd$ jest kwadratem liczby całkowitej.

4. Zauważ, że jeśli $p^2+q=a^2$, to $q=a^2-p^2$.

5. Dana równość jest równoważna równości

$$x^2-3x+3=(y+1)^2.$$

6. Zauważ, że $p^2+pq+q^2=(p+q)^2-pq$.

7. Niech a^{2019} będzie iloczynem liczb z tablicy. Co można powiedzieć o samej liczbie a?

8. Wykaż, że $n=ab$ prawie zawsze spełnia warunki zadania. W którym przypadku może pojawić się problem?

9. Przekształć dane równanie tak, aby po jego lewej stronie był iloczyn trzech czynników, a po prawej – zero.

10. Skorzystaj z zadania 4, aby wykazać, że $q=2p+1$. Zauważ, że

$$p^n=(a-q)(a+q).$$

11. Wykaż, że dla pewnej liczby pierwszej p zbiór

$$S=\{p,2p,3p,...,2020p\}$$

spełnia warunki zadania.

21. Obroty

1. Rozważ obrót wokół punktu C, który przeprowadza punkt D na punkt B.
2. Rozważ obrót wokół punktu O o kąt $90°$.
3. Rozważ obrót trójkąta ABM wokół punktu A taki, żeby punkt B przeszedł na punkt D.
4. Rozważ obrót punktu M wokół punktu A taki, że punkt B przeprowadza na punkt D.
5. Rozważ taki obrót o $90°$ wokół punktu A, że punkt B przechodzi na punkt D.
6. Rozważ obrót o kąt $60°$ punktu P wokół dowolnego wierzchołka trójkąta ABC.
7. Rozważ taki obrót punktu P wokół środka kwadratu, że punkt A przechodzi na punkt D.
8. Rozważ taki obrót wokół punktu B, że punkt C przechodzi na punkt A.
9. Rozważ obrót o kąt $60°$ wokół punktu C.
10. Rozważ obroty odcinków BE i AC odpowiednio wokół punktów C i E o kąt $\pm 90°$.

22. Niezmienniki

1. Jak zmienia się parzystość wartości rozważanego wyrażenia podczas zmieniania znaków?

2. Rozpatrz parzystość liczby minusów na planszy.

3. Jak zmienia się suma wszystkich liczb podczas danej operacji? A jaka jest największa możliwa jej wartość?

4. Pokoloruj szachownicę w „tradycyjny sposób" – w każdej kolumnie i każdym wierszu pola są na zmianę pokolorowane na biało i czarno. Zauważ, że każdy pionek musi zmienić kolor pola przy tym przestawieniu.

5. Jak zmienia się reszta z dzielenia przez 9 liczby na tablicy?

6. Zauważ, że zachodzi równość $(a+1)(b+1) = ab+a+b+1$.

7. Ponumeruj wszystkie pola liczbami od 1 do 10000, idąc kolejnymi rzędami: najpierw wpisując liczby od 1 do 100 w pierwszym rzędzie, potem liczby od 101 do 200 w drugim rzędzie, i tak dalej.

8. Jak zmienia się pole trójkąta podczas tej operacji?

9. Rozważ łączną liczbę par sąsiadów o różnych ustrojach.

10. Policz, ile jest takich par wróbli, które na początku siedziały w innej kolejności względem siebie, niż obecnie. Jak ta liczba się zmienia w każdym ruchu? Jaka była na początku, a jaka powinna być na końcu?

23. Kongruencje

1. Postępuj podobnie, jak w Przykładzie 1.

2. Wyznacz resztę z dzielenia danej liczby przez 10.

3. Rozpatrz reszty z dzielenia przez 3 obu stron równania.

4. Udowodnij, że liczba $abc-1$ jest podzielna przez wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$ i $c-1$.

5. Zauważ, że $(n-2) \equiv -2 \pmod{n}$.

6. Wykaż, że jedna z rozpatrywanych liczb zawsze jest podzielna przez 3.

7. Udowodnij, że obie liczby a i b są parzyste.

8. Załóż, że $a_t \equiv 0 \pmod{n}$. Jaką resztę z dzielenia przez n daje liczba a_{t+1}?

9. Zapisz dane podzielności za pomocą kongruencji. Wykaż, że liczba $a^{15} + 2^5 b^{15}$ jest podzielna przez p.

10. Wykaż, że dla $n \geqslant 5$ zachodzi przystawanie

$$1! + 2! + \cdots + n! \equiv 3 \pmod{10}.$$

Rozwiązania

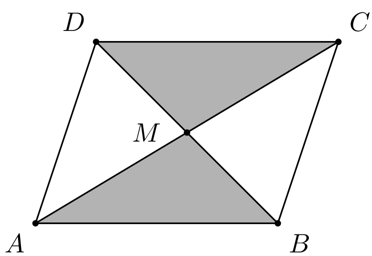
1 Trapezy równoramienne i równoległoboki

1. Najpierw wykażemy, że jeśli w czworokącie zachodzą dane warunki, to jest on równoległobokiem. Skoro $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$, to trójkąty AMB i CMD są przystające na mocy cechy bok-kąt-bok. Oznacza to, że $CD = AB$ i $\sphericalangle DCM = \sphericalangle BAM$. Odcinki AB i CD są więc równe i równoległe, a zatem $ABCD$ to równoległobok.

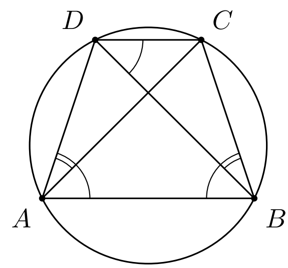
Teraz wykażemy, że jeśli czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem, to $MA = MC$ i $MB = MD$. Zauważmy, że zachodzą równości

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MCD, \quad \sphericalangle CDM = \sphericalangle ABM \quad \text{i} \quad AB = CD.$$

Oznacza to, że trójkąty AMB i CMD są przystające na mocy cechy kąt-bok-kąt. Z tego przystawania wynikają szukane równości.



Zadanie 1



Zadanie 2

2. Najpierw wykażemy, że proste AB i CD są równoległe. Zauważamy, że łuki AD i BC, które nie zawierają odpowiednio punktów C oraz A, są równej długości, bo cięciwy na nich oparte są równej długości. Stąd kąty oparte na nich są równej miary, a więc $\sphericalangle CDB = \sphericalangle ABD$. Zatem proste AB i CD są równoległe.

Teraz udowodnimy, że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC$. Zauważamy, że z równości kątów wpisanych opartych na łukach równej długości mamy

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = \sphericalangle ABC.$$

Własności kątów w okręgach są dokładniej opisane w rozdziale 18.

3. *Odpowiedź.* Odcinek CD może mieć długość 3 lub 4.

Rozpatrzmy trójkąt ABC, w którym

$$BC = 1, \quad AB = 4 \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle ABC = 60°.$$

Przeanalizujmy, gdzie może leżeć punkt D, aby spełnione były warunki zadania. Skoro czworokąt $ABCD$ jest trapezem, to punkt D leży na prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do prostej AB. Mamy też, że $AD = 1$, czyli punkt D może być dowolnym punktem przecięcia tej prostej z okręgiem o środku w punkcie A i promieniu 1. Okrąg może przecinać się z prostą w co najwyżej dwóch punktach. Skonstruujemy dwa punkty, które spełniają ten warunek – każdy z nich to jedno z możliwych położeń punktu D.

Rozpatrzmy taki punkt D_1, że czworokąt $ABCD_1$ jest równoległobokiem. Mamy wówczas $AD_1 = BC = 1$ oraz $AB \parallel CD_1$. W tym przypadku położenia punktu D łatwo otrzymujemy, że

$$CD_1 = AB = 4.$$

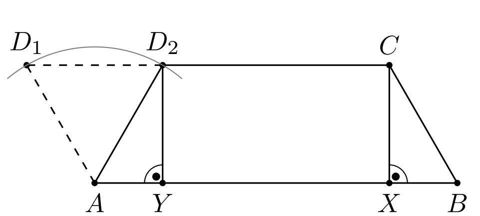
Oznaczmy jako D_2 taki punkt, że $ABCD_2$ jest trapezem równoramiennym. Wówczas $AB \parallel CD_2$ oraz $AD_2 = BC = 1$, czyli punkt D_2 jest drugim punktem przecięcia rozpatrywanych: okręgu i prostej.

Oznaczmy jako X i Y takie punkty na prostej AB, że proste CX i D_2Y są do niej prostopadłe. Skoro $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 60° < 90°$, to punkty X i Y leżą wewnątrz odcinka AB. Zauważmy, że trójkąty AD_2Y i BCX to trójkąty charakterystyczne 30-60-90, a więc

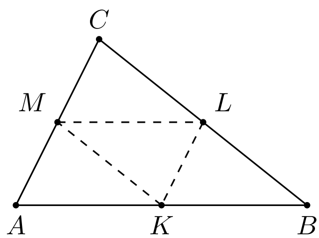
$$AY = \frac{1}{2}AD_2 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad BX = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}.$$

Ponadto czworokąt XYD_2C jest prostokątem. Mamy więc

$$CD_2 = XY = AB - AY - BZ = 3.$$



Zadanie 3

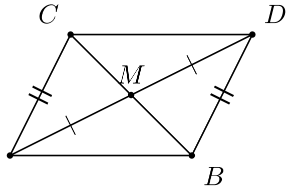


Zadanie 4

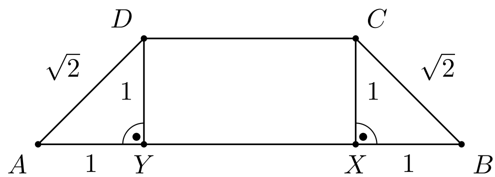
4. Skoro $KL \parallel AM$ i $ML \parallel AK$, to czworokąt $AKLM$ jest równoległobokiem. Ponadto $KM \parallel BL$ i $ML \parallel KB$, czyli czworokąt $KBLM$ również jest równoległobokiem. Skoro przeciwległe boki równoległoboku są równe, to mamy $AK = ML = BK$, skąd wynika teza.

5. Oznaczmy jako D taki punkt na prostej AM, że $AM = DM$ i punkt M leży wewnątrz odcinka AD. Wówczas, na mocy zadania 1, czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem. Wobec tego mamy $BD = AC$. Z nierówności trójkąta dla trójkąta ABD wynika, że

$$AB + AC = AB + BD > AD = 2AM.$$



Zadanie 5



Zadanie 6

6. Oznaczmy jako X i Y takie punkty na odcinku AB, że proste CX i DY są do niego prostopadłe. Wówczas proste te również są prostopadłe do prostej CD, czyli czworokąt $YXCD$ jest prostokątem. Stąd mamy, że

$$XY = CD = 2.$$

Z racji tego, że symetralna odcinka AB jest osią symetrii trapezu równoramiennego, mamy

$$AY = BX = \frac{AB - XY}{2} = 1.$$

Po uwzględnieniu faktu, że $AD = \sqrt{2}$ i $\sphericalangle DYA = 90°$, na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy

$$DY = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 1.$$

Zauważmy, że odcinek DY jest wysokością danego trapezu, więc możemy stwierdzić, że jego pole jest równe

$$\frac{DY \cdot (AB + CD)}{2} = \frac{1 \cdot (4 + 2)}{2} = 3.$$

7. Zauważmy, że z twierdzenia o linii środkowej dla trójkąta ABC otrzymujemy

$$KL \parallel AC \quad \text{oraz} \quad KL = \frac{AC}{2}.$$

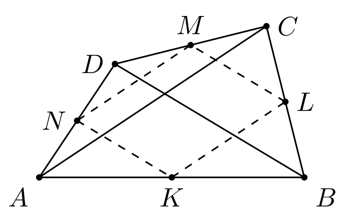
Analogicznie z twierdzenia o linii środkowej dla trójkąta ACD mamy, że

$$NM \parallel AC \quad \text{oraz} \quad NM = \frac{AC}{2}.$$

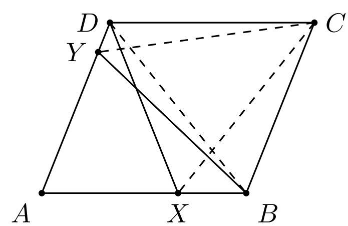
Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy, że

$$MN = KL = \frac{AC}{2} \quad \text{i} \quad MN \parallel KL \parallel AC.$$

Skoro odcinki MN i KL są równe i równoległe, to czworokąt $KLMN$ jest równoległobokiem. Z własności równoległoboku, dowodzonej również w zadaniu 1 wynika, że prosta KM przechodzi przez środek odcinka NL.



Zadanie 7



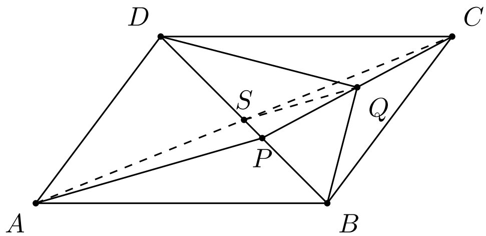
Zadanie 8

8. Z równości $DX = AD = BC$ oraz $BY = AB = CD$ wynika, że trapezy $BCDX$ i $BCDY$ są równoramienne i nie są równoległobokami. Stąd wniosek, że $CX = BD$ i $CY = BD$. Łącząc te równości, uzyskujemy tezę zadania.

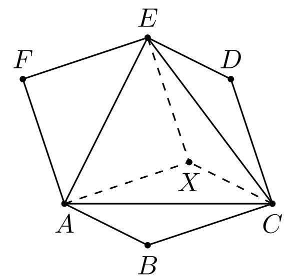
9. Niech S będzie punktem przecięcia przekątnych równoległoboku $ABCD$. Punkt S jest wtedy środkiem obu jego przekątnych. Odcinek QS łączy środki odcinków AC i PC. Wówczas z twierdzenia o linii środkowej

$$QS = \frac{1}{2}AP = \frac{1}{2}BD = BS = DS.$$

Wobec tego punkty B, D, Q leżą na okręgu o średnicy BD, skąd $\sphericalangle BQD = 90°$.



Zadanie 9



Zadanie 10

10. Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Do rozwiązania zadania wykorzystamy obserwację, że jeśli czworokąt $PQRS$ jest równoległobokiem, to $[PQR] = [PSR]$. Wynika to z faktu, że trójkąty PQR i PSR są symetryczne względem środka PR, a więc są przystające i w konsekwencji mają równe pola.

Rozważmy taki punkt X, że czworokąt $ABCX$ jest równoległobokiem. Wówczas odcinek AB jest równy i równoległy do odcinków DE i CX. Stąd odcinki DE i CX są równe i równoległe, więc czworokąt $CDEX$ jest równoległobokiem. Analogicznie dowodzimy, że czworokąt $EFAX$ jest równoległobokiem.

Zauważmy, że zachodzą równości

$$[AXC] = \frac{1}{2}[ABCX],$$

$$[CXE] = \frac{1}{2}[CDEX],$$

$$[EXA] = \frac{1}{2}[EFAX].$$

Skoro czworokąty $ABCX$, $CDEX$ oraz $EFAX$ są równoległobokami, to mamy, że punkt X leży po przeciwnej stronie prostej AC niż punkt B, po przeciwnej stronie prostej EC niż punkt D i po przeciwnej stronie prostej EA niż punkt F. Wnioskujemy więc, że punkt X leży wewnątrz trójkąta ACE. Dodając równości wyżej stronami otrzymujemy zatem tezę:

$$[AEC] = \frac{1}{2}([ABCX] + [CDEX] + [EFAX]) = \frac{1}{2}[ABCDEF].$$

2 Przekształcenia algebraiczne

1. *Odpowiedź.* Wartość wyrażenia x^2+y^2 jest równa 107.

Podnosimy wyjściową równość $x+y=11$ do kwadratu

$$x^2+2xy+y^2=121.$$

Mamy, że $xy=7$, a więc

$$x^2+y^2=121-2xy=107.$$

2. *Sposób 1.*
Podnieśmy równości z założeń stronami do kwadratu

$$9a^2+24ab+16b^2=16c^2,$$

$$16a^2-24ab+9b^2=9c^2.$$

Dodając te równania stronami, otrzymujemy, że

$$25a^2+25b^2=25c^2,$$

czyli $a^2+b^2=c^2$.

Sposób 2.
Postaramy się przemnożyć dane równania tak, aby po odjęciu ich stronami zredukowało się a. W tym celu pomnóżmy pierwsze równanie stronami przez 4, a drugie przez 3. Mamy więc

$$12a+16b=12c$$

$$12a-9b=12c$$

Odejmując drugą równość od pierwszej, otrzymujemy, że $25b=0$, czyli $b=0$. Podstawiając te zależność do pierwszej z powyższych dwóch równości, otrzymujemy, że $a=c$, czyli

$$a^2+b^2=a^2=c^2.$$

3. Przemnóżmy wyjściową równość przez $a+b$ stronami i przekształćmy równoważnie

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b},\\ \frac{a+b}{a} &= \frac{a+b}{b} + 1,\\ 1+\frac{b}{a} &= \frac{a}{b} + 1 + 1,\\ \frac{b}{a} &= \frac{a}{b} + 1.\end{aligned}$$

Dzieląc otrzymaną równość stronami przez ab, uzyskujemy

$$\begin{gathered}\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{ab} = \frac{a}{b}\cdot\frac{1}{ab} + \frac{1}{ab}.\\ \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{ab},\end{gathered}$$

co kończy dowód.

4. *Odpowiedź.* Dane wyrażenie może przyjąć wartość -1 lub 8.

Dodajmy 2 do każdej ze stron wyjściowej równości. Zauważamy, że

$$2 + \frac{-a+b+c}{a} = \frac{2a-a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{a}.$$

Rozumując analogicznie dla pozostałych ułamków, otrzymujemy zależność

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c} \tag{$*$}$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy $a+b+c=0$. Wówczas mamy równości:

$$a+b=-c, \qquad b+c=-a, \qquad c+a=-b.$$

Stąd uzyskujemy

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(-c)(-a)(-b)}{abc} = -1.$$

Załóżmy więc, że $a+b+c\neq 0$. Wówczas możemy podzielić równość $(*)$ stronami przez $a+b+c$ i otrzymamy $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$, skąd wprost wynika, że $a=b=c$. Wówczas mamy

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(2a)(2a)(2a)}{a^3} = 8.$$

5. Dodajmy ad do obu stron równości $ab = cd$, otrzymując

$$ab + ad = cd + ad, \quad \text{czyli} \quad a(b+d) = d(c+a).$$

Ponieważ $b + d = a + c > 0$, to $a = d$. Wstawiając tę równość do zależności $ab = cd$, dostajemy, że $b = c$.

6. Zauważmy, że w każdym z równań współczynniki przy a i c są takie same. Podobnie równe są współczynniki przy b i d. Oznaczmy więc $x = a + c$, $y = b + d$. Założenia zatem przybierają postać:

$$2x - 5y = 4 \quad \text{i} \quad 3x + 4y = 6.$$

Odejmując trzykrotność pierwszego równania od dwukrotności drugiego, dostajemy $y = 0$, czyli

$$ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) = xy = 0.$$

7. Przemnażając wyjściową równość stronami przez $a + b + c$, oraz przekształcając, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}
\frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(a+b+c)}{c+a} + \frac{c(a+b+c)}{a+b} &= a+b+c,\\
\frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(a+c)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} &= a+b+c,\\
\frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c &= a+b+c,\\
\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} &= 0.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ostatnia równość jest tą, którą chcieliśmy wykazać.

8. Z pierwszej równości mamy, że

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}.$$

Korzystając z założenia, że liczby a i b są różne, przekształcamy tę równość do postaci $bc = \frac{b-c}{a-b}$. Podobnie możemy wyliczyć, że

$$ab = \frac{a-b}{c-a} \quad \text{oraz} \quad ca = \frac{c-a}{b-c}.$$

Wymnażając stronami poprzednie trzy równości, otrzymujemy, że

$$(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca = \frac{b-a}{a-c} \cdot \frac{b-c}{a-b} \cdot \frac{c-a}{b-c} = (-1)^2 = 1,$$

co jest równoważne tezie.

9. Zauważamy, że dla dowolnej liczby dodatniej $n \neq 1$ zachodzi
$$\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{(n-1)n}-\frac{n-1}{(n-1)n}=\frac{1}{(n-1)n}.$$
Mamy więc, że
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}=$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=$$
$$=1-\left(\frac{1}{100}\right)=\frac{99}{100}.$$
Uwaga

W powyższym zadaniu przekształciliśmy wyjściowe wyrażenie do takiej sumy, aby pary kolejnych jej wyrazów się skracały. Taką sumę nazywamy *teleskopową*.

10. Na wstępie zauważmy, że
$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$
a zatem
$$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2.$$
By udowodnić, że co najmniej jedna z liczb a,b,c jest równa 2, wystarczy pokazać, że
$$(a-2)(b-2)(c-2)=0.$$
Pozbądźmy się nawiasów z powyższej równości
$$(a-2)(b-2)(c-2)=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8.$$
Skorzystajmy z równości udowodnionej na początku rozwiązania
$$abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8=$$
$$=abc-((a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2)+4(a+b+c)-8=$$
$$=a^2+b^2+c^2+abc-(a+b+c)^2+4(a+b+c)-8.$$
Wykorzystamy teraz równości dane w treści zadania
$$a^2+b^2+c^2+abc-(a+b+c)^2+4(a+b+c)-8=$$
$$=5-3^2+4\cdot 3-8=0,$$
czego należało dowieść.

3 Zasada szufladkowa Dirichleta

1. • Każdą osobę „umieśćmy” w szufladce oznaczonej numerem miesiąca, w którym ma urodziny. Osób jest 13, a szufladek – 12, zatem pewne dwie osoby muszą być w tej samej szufladce, wiec urodziny mają w tym samym miesiącu.

• Każdą osobę „umieśćmy” w szufladce oznaczonej numerem dnia miesiąca, w którym ma urodziny. Osób jest 64, a szufladek – 31, zatem w pewnej szufladce musi być przynajmniej $\left\lceil \frac{64}{31} \right\rceil = 3$ osoby. To właśnie te trzy osoby mają urodziny tego samego dnia miesiąca.

2. *Odpowiedź.* Musimy wyjąć co najmniej 4 skarpetki.

Jeśli wyjmiemy tylko 3 skarpetki, to możemy trafić na jedną czerwoną, jedną zieloną i jedną niebieską, więc musimy wyjąć przynajmniej 4 skarpetki. Jeśli wyjmiemy 4 skarpetki to, ponieważ są jedynie 3 kolory, pewne dwie muszą być tego samego koloru.

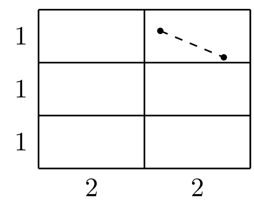
3. Rozważmy zbiory:

$$\{1,16\},\{2,15\},\{3,14\},\ldots,\{8,9\}.$$

Szufladek tych jest osiem, zaś wybranych liczb dziewięć, zatem pewne dwie liczby muszą należeć do tej samej szufladki. Ich suma, ponieważ są w jednej szufladce, wynosi 17, czego należało dowieść.

4. Zauważmy, że suma ocen ucznia jest liczbą całkowitą z przedziału $[2,12]$, zatem może przyjmować 11 różnych wartości. Uczniów jest 34, zatem można wybrać przynajmniej $\left\lceil \frac{34}{11} \right\rceil = 4$ takich uczniów, że będą oni wszyscy mieć taką samą sumę ocen. Skoro ci uczniowie mają taką samą sumę ocen, to mają też taką samą średnią ocen, co było do wykazania.

5. Podzielmy wyjściowy prostokąt na 6 prostokątów o wymiarach 1×2 w sposób zilustrowany na rysunku.



Ponieważ jest 7 punktów, a prostokątów 1×2 tylko 6, to w przynajmniej jednym prostokącie 1×2 są przynajmniej dwa punkty. Ponieważ przekątna prostokąta 1×2 na mocy twierdzenia Pitagorasa ma długość $\sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, to odległość tych dwóch punktów nie może być większa niż właśnie $\sqrt{5}$, czego należało dowieść.

6. Rozważmy dowolny trójkąt równoboczny o boku 1. Zauważmy, że ma on trzy wierzchołki, a kolory są tylko dwa. Zatem pewne dwa wierzchołki muszą być tego samego koloru. Te dwa wierzchołki spełniają warunki zadania.

7. Udowodnimy, że szukaną najmniejszą liczbą jest $n = 10$. Zauważmy, że każde dwie spośród następujących dziesięciu liczb:

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4, ..., 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,\ 2^9 = 521$$

mają tę własność, że jedna jest dzielnikiem drugiej. Wobec tego żadne dwie z tych liczb nie mogą mieć tego samego koloru, a zatem użytych musi być co najmniej 10 kolorów. Z drugiej strony, malując liczbę 1 pierwszym kolorem, liczby 2 i 3 — drugim, liczby od 4 do 7 — trzecim, itd. aż w końcu liczby od 512 do 1000 — dziesiątym, uzyskujemy kolorowanie, w którym iloraz dowolnych dwóch liczb tego samego koloru jest mniejszy od 2. Stąd wniosek, że przy tym kolorowaniu każde dwie liczby, z których jedna jest dzielnikiem drugiej są pomalowane różnymi kolorami.

8. Rozpatrzmy liczby

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n.$$

Jest n reszt z dzielenia przez n, a ciąg ten ma $n+1$ elementów, zatem pewne dwa jego wyrazy dają taką samą resztę z dzielenia przez n. Nazwijmy je 10^k i 10^l, przy czym $k > l$. Wówczas liczba $10^k - 10^l$ jest podzielna przez n. Ponadto zapis dziesiętny takiej liczby składa się jedynie z cyfr 0 i 9.

9. Każdą liczbę „włóżmy” do szufladki oznaczającej jej resztę z dzielenia przez 10. Jeśli teraz każda z szufladek jest niepusta, to z każdej szufladki wybieramy po jednej liczbie. Oczywiście różnica każdych dwóch wybranych liczb nie jest podzielna przez 10. Jeśli pewna szufladka jest pusta, to nasze 82 liczby rozmieszczamy do 9 szufladek, więc w pewnej szufladce musi być przynajmniej $\left\lceil \frac{82}{9} \right\rceil = 10$. Różnica każdych dwóch liczb z tej szufladki dzieli się przez 10, zatem te liczby spełniają warunki zadania.

10. Dla dodatniej liczby rzeczywistej a wartość wyrażenia $\frac{1}{1+a}$ należy do przedziału $(0,1)$. Rozpatrzmy liczby

$$\frac{1}{1+a_1}, \frac{1}{1+a_2}, \frac{1}{1+a_3}, \frac{1}{1+a_4}, \frac{1}{1+a_5}$$

oraz przedziały

$$\left(0, \frac{1}{4}\right], \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left(\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left(\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right).$$

Skoro mamy pięć liczb i cztery przedziały, to, na mocy zasady szufladkowej, do pewnego przedziału należeć będą przynajmniej dwie liczby: $\frac{1}{1+a_i}$ i $\frac{1}{1+a_j}$, bez straty ogólności $\frac{1}{1+a_i} > \frac{1}{1+a_j}$. Pozostaje zauważyć, że wówczas

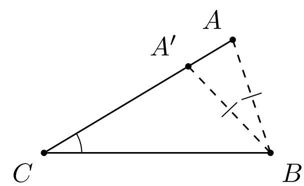
$$0 \leqslant \frac{1}{1+a_i} - \frac{1}{1+a_j} < \frac{1}{4}.$$

4 Przystawanie trójkątów

1. Rozważmy trójkąt $AA'B$, w którym $AB = A'B$. Niech C będzie punktem na prostej AA', poza odcinkiem AA'. Niech ponadto $B' = B$ i $C' = C$. Wykażemy, że trójkąt ABC i $A'B'C'$ spełniają dane w zadaniu równości. Zauważamy, że zachodzą równości

$$AB = A'B', \quad BC = B'C' \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCA = \sphericalangle B'C'A,$$

ale trójkąty ABC i $A'B'C$ nie są przystające.



Zadanie 1

2. Niech $D = H$. Wówczas

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD, \quad CD = CD \quad \text{i} \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle BDC = 90°,$$

zatem na mocy cechy bok-kąt-bok mamy, że trójkąty CDA i CDB są przystające, więc $CA = CB$.

Niech $H = S$. Wówczas

$$AH = HB, \quad \sphericalangle AHC = \sphericalangle BHC = 90° \quad \text{i} \quad CH = CH,$$

więc na mocy cechy bok-kąt-bok mamy, że $\triangle AHC \equiv \triangle BHC$, czyli zachodzi $CA = CB$.

Niech $S = D$. Rozważmy taki punkt K, by punkt S był środkiem odcinka CK. Zauważmy, że

$$AS = BS, \quad \sphericalangle ASC = \sphericalangle BSK \quad \text{i} \quad CS = KS,$$

więc na mocy cechy bok-kąt-bok mamy, że $\triangle ASC \equiv \triangle BSK$, skąd

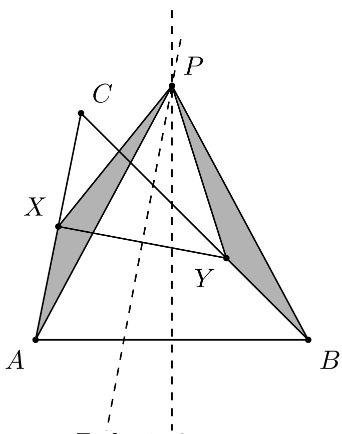
$$CA = BK \quad \text{i} \quad \sphericalangle BCS = \sphericalangle SCA = \sphericalangle SKB.$$

Skoro $\sphericalangle BCK = \sphericalangle CKB$, to $BC = BK = AC$.

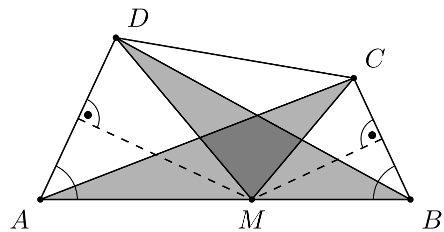
3. Skoro punkt P leży na symetralnej odcinka AB, to zachodzi równość $AP = BP$. Wiadomo też, że jest on także na symetralnej XY, więc prawdą jest, że $PX = PY$. Skoro zachodzą równości

$$PX = PY, \quad AP = BP \quad \text{oraz} \quad AX = BY,$$

to trójkąty AXP oraz BYP są przystające. Stąd $\sphericalangle XAP = \sphericalangle YBP$, co jest równoważne tezie.



Zadanie 3



Zadanie 4

4. Punkt M leży na symetralnej odcinka AD, więc

$$AM = DM \quad \text{i} \quad \sphericalangle MAD = \sphericalangle ADM.$$

Analogicznie

$$MC = MB \quad \text{i} \quad \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} \sphericalangle AMC &= 180° - \sphericalangle BMC \\ &= \sphericalangle MBC + \sphericalangle MCB \\ &= 2\sphericalangle MBC. \end{aligned}$$

Podobnie $\sphericalangle DMB = 2\sphericalangle MAD$, więc $\sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB$.

Łącząc równości:

$$AM = DM, \quad \sphericalangle AMC = \sphericalangle DMB \quad \text{i} \quad CM = BM,$$

na mocy cechy bok-kąt-bok $\triangle AMC = \triangle DMB$, więc $AC = BD$.

5. Dorysujmy wysokość CH danego trójkąta. Oznaczmy rzuty prostokątne punktów X i Y na prostą CH jako S i T odpowiednio. Zauważamy, że czworokąty $XSHP$ i $YTHQ$ są prostokątami. Mamy stąd, że zachodzą równości:

$$PH = XS \quad \text{i} \quad QH = YT. \tag{*}$$

Wiemy też stąd, że odcinki XS oraz YT są równoległe do prostej AB. Łącząc to z faktem, że kąty $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$ mają równe miary otrzymujemy równość

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle SXC = \sphericalangle ABC = \sphericalangle TYC.$$

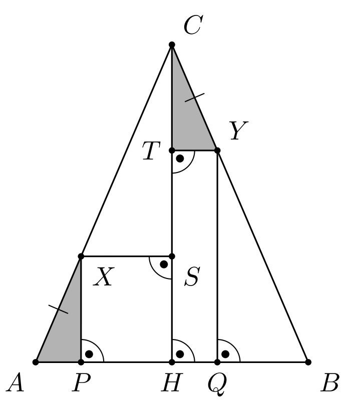
Zauważamy, że trójkąty APX i YTC są do siebie przystające na mocy cechy kąt-bok-kąt, gdyż

$$\sphericalangle APX = \sphericalangle YTC = 90°, \quad AX = YC, \quad \sphericalangle XAP = \sphericalangle CYT.$$

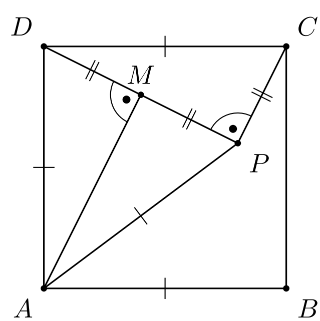
Stąd $AP = TY$. Analogicznie rozumując, otrzymujemy, że trójkąty XSC oraz BQY są do siebie przystające oraz $XS = BQ$. Łącząc otrzymane równości z równaniem $(*)$, otrzymujemy, że

$$PQ = HP + HQ = XS + YT = AP + QB = AB - PQ,$$

a więc $PQ = \frac{1}{2}AB$.



Zadanie 5



Zadanie 6

6. Niech punkt M będzie środkiem odcinka DP. Skoro $AP = AB = AD$, to trójkąt DAP jest równoramienny, a więc $\sphericalangle AMD = 90°$.

Wiemy również, że

$$\sphericalangle ADM = 90^\circ - \sphericalangle PDC = \sphericalangle DCP \quad \text{oraz} \quad AD = DC,$$

skąd otrzymujemy, że trójkąty AMD i CDP są przystające na mocy cechy kąt-bok-kąt. Czyli $DM = CP$, więc $DP = 2DM = 2CP$.

7. Oznaczmy punkty styczności sfery wpisanej do ścian SAB, SBC, SCD, SDA jako X, Y, Z i T. Zauważamy, że odcinki SX i SY są równej długości, gdyż są to odcinki styczne do sfery poprowadzone z tego samego punktu. Analogicznie rozumując, uzasadniamy, że $BX = BY$. Z powyższych równości wynika, że trójkąty SXB i SYB są przystające na mocy cechy bok-bok-bok. Stąd mamy równość kątów $\sphericalangle XSB = \sphericalangle BSY$. Analogicznie rozumując, otrzymujemy, że zachodzą przystawania:

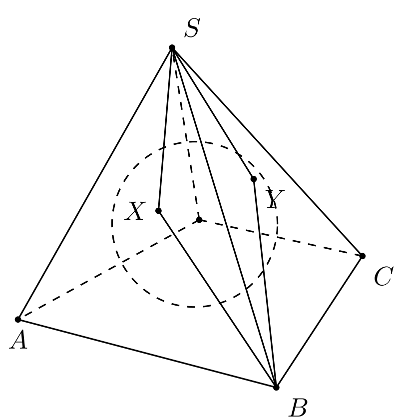
$$\triangle CYZ \equiv \triangle CZS, \quad \triangle DZS \equiv \triangle DTS, \quad \triangle ATS \equiv \triangle AXS.$$

Możemy z nich wywnioskować następujące równości kątów:

$$\sphericalangle CSY = \sphericalangle CSZ, \quad \sphericalangle DSZ = \sphericalangle DST, \quad \sphericalangle AST = \sphericalangle ASX.$$

Pozostaje tylko zauważyć, że zachodzi równość

$$\begin{aligned} \sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD &= \sphericalangle ASX + \sphericalangle BSX + \sphericalangle CSZ + \sphericalangle DSZ = \\ &= \sphericalangle AST + \sphericalangle BSY + \sphericalangle CSY + \sphericalangle DST = \\ &= \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA. \end{aligned}$$



Zadanie 7

8. Zauważmy, że $AK = KB$, $CK = KD$ oraz

$$\sphericalangle AKC = \sphericalangle AKB + \sphericalangle BKC = \sphericalangle CKD + \sphericalangle BKC = \sphericalangle BKD.$$

Na mocy cechy bok-kąt-bok otrzymujemy, że $\triangle AKC \equiv \triangle BKD$, zatem $AC = BD$. Łącząc ostatnią równość z równościami $CL = LB$ i $AL = LD$, otrzymujemy, na mocy cechy bok-bok-bok, przystawanie $\triangle CLA = \triangle BLD$. Stąd wniosek, że $\sphericalangle CLA = \sphericalangle BLD$. W zależności od tego, czy A, czy C leży w kącie rozwartym DCB, i czy B, czy D leży w kącie rozwartym ALC, otrzymujemy

$$\sphericalangle DLA + \sphericalangle DLC = \sphericalangle BLC + \sphericalangle CLD$$

lub

$$\sphericalangle DLA + \sphericalangle DLC + \sphericalangle BLC + \sphericalangle CLD = 360°.$$

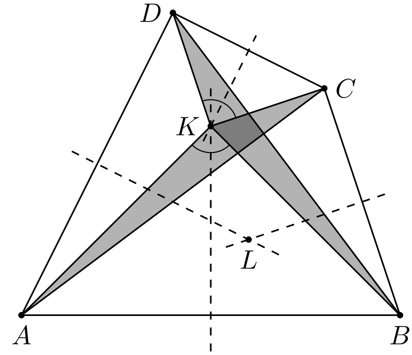
W pierwszym przypadku otrzymujemy tezę. Pozostało wykluczyć drugi wariant. Gdyby zachodził, to, skoro

$$\sphericalangle DLA + \sphericalangle ALB + \sphericalangle BLC + \sphericalangle CLD = 360°,$$

mielibyśmy $\sphericalangle ALB = \sphericalangle DLC$. Zauważamy, że łącząc tę równość kątów z równościami $CL = LB$ i $AL = LD$, otrzymujemy, na mocy cechy bok-kąt-bok, przystawanie $\triangle DLC = \triangle ALB$, czyli $AB = CD$ i $\sphericalangle ABL = \sphericalangle DCL$. Skoro trójkąt BLC jest równoramienny, to

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABL + \sphericalangle LBC = \sphericalangle LCD + \sphericalangle BCL = \sphericalangle DCB.$$

Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy, że czworokąt $ABCD$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AD i BC. Przeczy to założeniu z treści zadania, że ten czworokąt nie jest trapezem.



Zadanie 8

9. Niech K i L będą rzutami punktu M odpowiednio na proste AC i BC. Wówczas

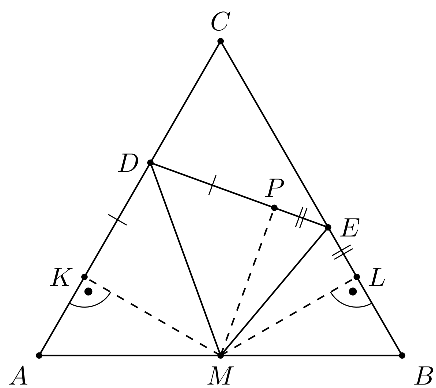
$$\sphericalangle KML = 120^\circ \quad \text{i} \quad KM = LM.$$

Niech P będzie punktem symetrycznym do punktu K względem prostej DM. Wówczas

$$LM = KM = PM$$

oraz

$$\sphericalangle ETP = 60^\circ - \sphericalangle DMP = \frac{1}{2}\big(120^\circ - \sphericalangle KMP\big) = \frac{1}{2}\sphericalangle LMP.$$



Zadanie 9

Stąd $\sphericalangle EMP = \sphericalangle EML$. Łącząc tę równość z $PM = ML$ i $ME = ME$, otrzymujemy na mocy cechy bok-kąt-bok, że

$$\triangle EMP \equiv \triangle EML.$$

Skoro

$$\sphericalangle DPM + \sphericalangle EPM = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

to punkt P leży na odcinku DE, zatem

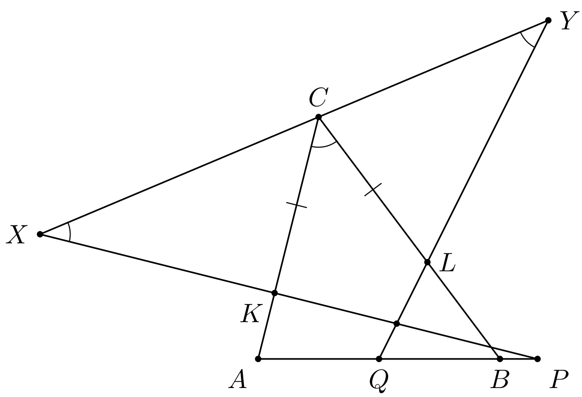
$$\begin{aligned} AD + BE &= DK + EL + AK + BC \\ &= DP + EP + \frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}BM \\ &= DE + \frac{1}{2}AB. \end{aligned}$$

10. Rozpatrzmy takie punkty X oraz Y, aby zachodziły przystawania $\triangle KCX = \triangle CYL = \triangle ABC$, punkty B i X leżały po przeciwnych stronach prostej AC oraz punkty A i Y leżały po przeciwnych stronach prostej BC. Wówczas zachodzi równość

$$\sphericalangle LCY + \sphericalangle BCA + \sphericalangle KCX = \sphericalangle BAC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle ABC = 180°,$$

czyli punkty X, C oraz Y są współliniowe.

Uzasadnimy, że punkty P, M i X są współliniowe. Skoro P leży na symetralnej odcinka AK, to trójkąt APK jest równoramienny, czyli $\sphericalangle AKP = \sphericalangle PAK = \sphericalangle CKX$, co dowodzi postulowanej współliniowości. Analogicznie dowodzimy, że punkty Q, M oraz Y są współliniowe.



Zadanie 10

Wiemy, że $\sphericalangle CYL = \sphericalangle KXC$, czyli trójkąt MXY jest równoramienny, więc $MX = MY$. Na mocy założonego na początku rozwiązania przystawania trójkątów oraz wykazanych równości otrzymujemy, że

$$MX = MY,$$
$$MK + KX = ML + LY,$$
$$MK + AC = ML + BC,$$
$$MK + AK + KC = ML + BL + LC,$$
$$MK + AK = ML + BL,$$

co było do udowodnienia.

5 Podzielności

1. Liczby 2 i 3 to różne liczby pierwsze, więc żeby wykazać, że liczba $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez $6 = 2 \cdot 3$ wystarczy udowodnić, że jest podzielna przez 2 i 3.

Zauważmy, że skoro liczby n i $n+1$ są dwiema kolejnymi liczbami całkowitymi, to jedna z nich jest podzielna przez 2. Wobec tego

$$2 \mid n(n+1)(2n+1).$$

Jeśli $3 \mid n(n+1)$, to

$$3 \mid n(n+1)(2n+1).$$

Jeśli $3 \nmid n(n+1)$, to korzystając z faktu, że jedna z liczb n, $n+1$ i $n+2$ jest podzielna przez 3, otrzymujemy, że $3 \mid n+2$. W takim razie

$$3 \mid 2(n+2) = 2n+1+3,$$

więc $3 \mid 2n+1$, skąd wniosek, że również w tym przypadku

$$3 \mid n(n+1)(2n+1).$$

Wobec tego liczba $n(n+1)(2n+1)$ jest podzielna przez 2 i 3, zatem również przez 6.

2. *Odpowiedź.* Szukane pary to $(1,1)$ i $(2,2)$.

Przypuśćmy, że $ab \mid a+b$. Wówczas $a \mid a+b$, więc $a \mid b$. Skoro liczby a oraz b są dodatnie, to $a \leqslant b$. Analogicznie otrzymujemy $b \leqslant a$, a stąd $a = b$. Wstawiając tę równość do badanej podzielności, dostajemy $a^2 \mid 2a$, czyli $a \mid 2$, więc $a = 1$ lub $a = 2$. Pozostaje tylko sprawdzić, że pary $(1,1)$ i $(2,2)$ spełniają zadaną podzielność.

3. Zauważmy, że $n^4 - n^2 = n^2(n+1)(n-1)$. Wobec tego, jeżeli $2 \mid n$, to $4 \mid n^2$, skąd mamy żądaną podzielność. Pozostaje rozważyć $2 \nmid n$. Wówczas liczby $n+1$ oraz $n-1$ są parzyste, a stąd $4 \mid (n+1)(n-1)$, więc również w tym przypadku wykazaliśmy tezę.

4. *Sposób 1.*
Dana podzielność jest równoważna podzielności

$$n+1 \mid (n^2+1)-(n-1)(n+1)=2.$$

Skoro jedynymi dzielnikami liczby 2 są: -2, -1, 1 oraz 2, to n wynosi -3, -2, 0 lub 1.

Sposób 2.
Niech $m=n+1$. Podstawiając $n=m-1$, dostajemy

$$m=n+1 \mid n^2+1=(m-1)^2+1=m^2-2m+2.$$

Skoro $m \mid m^2-2m$, to powyższa podzielność jest równoważna podzielności $m \mid 2$, czyli możliwe wartości $m=n+1$ to -2, -1, 1, 2.

5. *Odpowiedź.* Są to wszystkie liczby postaci $\overline{ab0ab}$ dla $a \neq 0$.

Zauważmy, że

$$\overline{abcab}=10010a+1001b+100c=1001(10a+b)+99c+c.$$

Można szybko sprawdzić, że 1001 i 99 są podzielne przez 11. Zatem $11 \mid \overline{abcab}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $11 \mid c$. Jedyną liczbą jednocyfrową podzielną przez 11 jest 0, więc ostatecznie, aby warunek z zadania zachodził, liczba c musi być równa 0, natomiast a i b mogą być dowolne. Należy pamiętać, że na mocy założeń zadania $a \neq 0$.

6. *Odpowiedź.* Są to pary $(35,140)$, $(70,105)$, $(105,70)$, $(140,35)$.

Dzielnikami pierwszymi liczby 175 są liczby 5 i 7. Wobec tego liczba ab jest podzielna przez 5, skąd wynika, że liczba a lub liczba b jest podzielna przez 5. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że liczba a jest podzielna przez 5. Ponieważ $b=175-a$, więc liczba b także jest podzielna przez 5. Zatem obie liczby są podzielne przez 5.

Podobnie dowodzimy, że liczby a i b są podzielne przez 7. Wobec tego liczby a i b są podzielne przez 35, czyli istnieją dodatnie liczby całkowite k i l, dla których $a=35k$ oraz $b=35l$. Stąd wynika, że $35(k+l)=175$. A zatem $k+l=5$, więc (k,l) jest jedną z czterech par: $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$. Uzyskujemy stąd możliwe pary (a,b) jak w odpowiedzi. Bezpośrednio sprawdzamy, że wszystkie te cztery pary spełniają warunki zadania.

7. Zauważmy, że z podzielności $a+k \mid b+k$ wynika
$$a+k \mid (b+k)-(a+k) = b-a.$$
Wobec tego, jeżeli $a \neq b$, to $a+k \leqslant |b-a|$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej k. Wystarczy jednak przyjąć $k=|b-a|$, żeby zachodziła nierówność w drugą stronę:
$$a+k = a+|b-a| > |b-a|.$$
To pokazuje, że założenie $a \neq b$ prowadzi do sprzeczności, więc musi zachodzić $a=b$.

8. Jeżeli liczba $4ab-1$ jest podzielna przez $a+b+1$, to liczba
$$4ab-1+2(a+b+1) = 4ab+2a+2b+1 = (2a+1)(2b+1)$$
również jest podzielna przez $a+b+1$. Skoro $a+b+1$ jest liczbą pierwszą, to jest dzielnikiem co najmniej jednego z czynników $2a+1$, $2b+1$. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $a+b+1$ dzieli $2a+1$. Gdyby spełniona była nierówność
$$\frac{2a+1}{a+b+1} \geqslant 2,$$
to mnożąc obie strony przez liczbę dodatnią $a+b+1$, uzyskalibyśmy $2a+1 \geqslant 2a+2b+2$, czyli $2b+1 \leqslant 0$. To przeczy warunkowi, że liczba b jest dodatnia. Wobec tego musi być spełniona równość
$$\frac{2a+1}{a+b+1} = 1,$$
która po obustronnym pomnożeniu przez $a+b+1$ daje
$$2a+1 = a+b+1, \qquad \text{czyli} \qquad a=b.$$

9. Skoro dodatnie liczby całkowite $2m+n$ oraz $3m+2n$ dzielą pewną potęgę dwójki, to każda z nich musi być potęgą dwójki. Zatem $2m+n=2^a$ oraz $3m+2n=2^b$ dla pewnych nieujemnych liczb całkowitych a i b. Zauważmy jednak, że zachodzą nierówności
$$2m+n < 3m+2n < 4m+2n = 2(2m+n),$$
więc
$$2^a < 2^b < 2^{a+1},$$

co jest sprzecznością, ponieważ pomiędzy dwiema kolejnymi potęgami dwójki nie może znajdować się potęga dwójki.

10. *Odpowiedź.* Pary spełniające podzielność to $(1,1)$ i $(2,4)$.

Możemy przejść do rozwiązania zadania. Skoro $ab \mid a^2+b$, to również $a \mid a^2+b$, skąd $a \mid b$. Wobec tego istnieje taka dodatnia liczba całkowita k, że $ak=b$. Otrzymujemy wówczas podzielność

$$a^2k \mid a^2+ak=a\cdot(a+k).$$

Na mocy własności 4 ze skryptu prawdą jest, że $ak \mid a+k$. Możemy wywnioskować, że $a \mid a+k$, a więc $a \mid k$.

Analogicznie otrzymujemy, że $k \mid a+k$, czyli $k \mid a$. Skoro $a \mid k$ oraz $k \mid a$, oraz obie te liczby są dodatnie, to $a=k$. Wtedy $a^2 \mid 2a$, czyli na mocy własności 4 ze skryptu zachodzi podzielność $a \mid 2$. Oznacza to, że $a=k=1$ lub $a=k=2$.

Wobec powyższego jedynie pary $(1,1)$ i $(2,4)$ mogą spełniać założenia zadania. Bezpośrednio sprawdzając, można przekonać się, że te pary istotnie spełniają zadaną podzielność.

6 Grafy

1. Zauważmy, że z Lematu o uściskach dłoni wynika, że suma wszystkich stopni wierzchołków w grafie jest liczbą parzystą. Suma stopni wierzchołków o stopniu parzystym jest liczbą parzystą. W tam razie suma stopni wierzchołków o stopniu nieparzystym musi być parzysta. Gdyby tych wierzchołków było nieparzyście wiele, to suma ich stopni byłaby liczbą nieparzystą. Wobec tego liczba takich wierzchołków musi być parzysta.

2. Załóżmy nie wprost, że na przyjęciu nie ma takiej trójki. Niech A będzie pewnym uczestnikiem przyjęcia, a $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$ pewnymi jego dziesięcioma znajomymi. Wówczas jeśli B_1 zna pewną osobę spośród $B_2, \ldots, B_{10}$, powiedzmy B_i, to wtedy (A, B_1, B_i) to trójka osób, spośród których każde dwie się znają. Przeczy to naszemu założeniu, więc B_1 nie może znać nikogo spośród $B_2, B_3, \ldots, B_{10}$.

Zastanówmy się, kogo w takim razie może znać B_1. Zna A i poza tym może znać jedynie osiem osób – tych które nie znają A. W takim razie B_1 ma co najwyżej dziewięciu znajomych. Powyższa sprzeczność dowodzi, że szukana trójka musi istnieć.

3. Rozważmy graf, w którym każdy wierzchołek odpowiada jednej ze ścian, a wierzchołki są połączone wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ściany mają wspólny bok. Wówczas stopień każdego wierzchołka wynosi tyle, ile dana ściana ma boków. Na mocy zadania 1. graf ten musi mieć parzystą liczbę wierzchołków o nieparzystych stopniach, czyli dany wielościan musi mieć parzystą liczbę ścian o nieparzystej liczbie boków.

4. *Odpowiedź.* Podana sytuacja jest możliwa.

Rozpatrzmy graf odpowiadający zadaniu. Każdej z osób będzie odpowiadał jeden wierzchołek. Dwa wierzchołki będą połączone krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im osoby się znają.

Rozpatrzymy 8 wierzchołków z których każde dwa są połączone krawędzią. Wówczas stopień każdego z tych wierzchołków wynosi 7.

Pogrupujmy więc danych 200 wierzchołków w 25 grup po 8 wierzchołków i połączmy każdą parę wierzchołków, jeśli oba wierzchołki należą do jednej grupy. Podany graf spełnia warunki zadania.

5. Niech A będzie jednym z uczestników przyjęcia. Oprócz niego jest na przyjęciu pięć innych osób, więc A zna co najmniej trzy z nich lub nie zna co najmniej trzech z nich. Rozważmy dwa przypadki:

1. A zna pewne trzy z nich. Niech B, C, D będą tymi osobami. Wówczas jeśli którychś dwóch z nich się zna, to razem z A tworzą oni trójkę znających się wzajemnie osób. Jeśli żadnych dwóch spośród nich się nie zna, to B, C, D są trójką nieznających się osób.
2. A nie zna pewnych trzech z nich. Niech B, C, D będą tymi osobami. Wówczas jeśli którychś dwóch z nich się nie zna, to razem z A tworzą oni trójkę nieznających się wzajemnie osób. Jeśli każdych dwóch spośród nich się zna, to B, C, D są trójką znających się osób. Wobec powyższego zawsze taka trójka istnieje, czego należało dowieść.

6. Załóżmy, że każdy zawodnik wygrał dokładnie x meczów. W takim razie każdy przegrał $49-x$ meczów. Niech M oznacza liczbę wszystkich rozegranych meczów. Zauważmy, że M jest równe liczbie wszystkich wygranych, czyli $M=50x$. Z drugiej strony, M jest równe liczbie wszystkich przegranych, czyli $M=50(49-x)$. Stąd

$$50x=50(49-x).$$

W takim razie $49=2x$, czyli x nie jest liczbą całkowitą, co stanowi sprzeczność.

7. *Odpowiedź.* Zaplanowanie podróży, która spełnia warunki zadania, nie jest możliwe.

Przypuśćmy nie wprost, że podróż spełniająca warunki zadania jest możliwa. Rozpatrzmy jedno z 50 miast północnych, takie że nie zaczynamy ani nie kończymy w nim podróży — nazwijmy je A.

Z miasta A wychodzi dokładnie 51 dróg, każda do innego miasta południowego. W trakcie podróży przejechano przez każdą z tych dróg dokładnie raz. Możemy podzielić te drogi na dwa zbiory — te, którymi dojechaliśmy do A oraz te, którymi wyjechaliśmy z A. Skoro A nie jest miastem początkowym ani końcowym naszej podróży, to te zbiory muszą mieć równą liczbę elementów. Stąd otrzymujemy, że liczba dróg wychodzących z A jest parzysta. Zaś dróg tych jest dokładnie 51 — co daje sprzeczność.

Uwaga
Jeśli w grafie jest możliwe przejście przez każdą krawędź dokładnie raz, przy czym wrócimy do punktu wyjścia, to mówimy, że w takim grafie istnieje *cykl Eulera*. Można udowodnić, że taki cykl istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego z wierzchołków jest parzysty i pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami istnieje łącząca je ścieżka (potencjalnie złożona z więcej niż jednej krawędzi).

8. Załóżmy, że czerwone odcinki nie spełniają tej własności. Wówczas graf złożony z danych punktów i tylko czerwonych odcinków „rozpada się” na kilka niepołączonych części, między którymi są tylko niebieskie odcinki.

Udowodnimy, że pomiędzy dowolnymi dwoma punktami istnieje niebieska ścieżka. Jeżeli pewne dwa punkty są w różnych częściach czerwonego grafu, to jest między nimi niebieska krawędź — gdyby była czerwona, to te części nie byłyby oddzielne.

Pozostaje dowieść tej własności dla dwóch punktów A i B znajdujących się w tej samej części czerwonego grafu. Skoro graf rozpada się na osobne części, to istnieje taki punkt C, że krawędzie od A do C oraz od B do C są niebieskie. Wobec tego istnieje niebieska ścieżka od A do B. Powyższy wniosek kończy dowód.

9. Rozwiązanie będzie polegało na wskazaniu algorytmu, który dokonuje rozważanego przyporządkowania liczb i wykazaniu, że działa on poprawnie.

Oznaczmy wierzchołki tego grafu W_1, W_2, ..., W_n. W tej kolejności podpisujemy każdy z nich dowolną z liczb, która nie została już przyporządkowana do żadnego z jego sąsiadów. Na pewno istnieje taka liczba, ponieważ mamy ich do dyspozycji 21, a wierzchołek ma co najwyżej 20 sąsiadów.

Wystarczy dowieść, że ten prosty algorytm nie przyporządkuje żadnym dwóm sąsiednim wierzchołkom tej samej liczby. Załóżmy nie wprost, że wierzchołki sąsiednie W_k i W_l, gdzie $k < l$ zostały podpisane tą samą liczbą. W takim razie przy podpisywaniu wierzchołka W_l musieliśmy nie przestrzegać zasady o przyporządkowaniu liczby innej od liczb przyporządkowanych wszystkim jego sąsiadom, co daje sprzeczność. A więc ten algorytm daje poprawne podpisanie wierzchołków, czyli takie istnieje.

10. Najpierw wykażemy, że istnieje taka grupa $n+1$ osób, że każde dwie osoby z tej grupy się znają.

Rozpatrzmy najliczniejszy podzbiór danych osób, że każde dwie z nich się znają. Jeśli jest więcej niż jeden taki podzbiór, weźmy dowolny z nich. Oznaczmy powyższy zbiór jako S. Załóżmy nie wprost, że zbiór S liczy $k \leqslant n$ osób. Dokładając do niego $n-k$ dowolnych osób, otrzymamy pewną grupę liczącą n osób. Na mocy założenia istnieje taka osoba x, która zna wszystkich z tej grupy, więc w szczególności zna wszystkie osoby z S. Zbiór S wraz z osobą x tworzy więc grupę osób, z której każde dwie się znają oraz liczy $k+1 > k$ osób — sprzeczność z maksymalnością zbioru S.

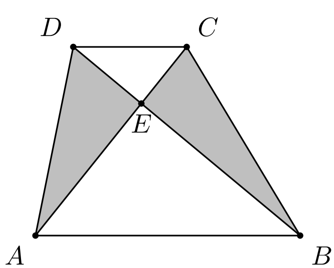
Weźmy więc ten zbiór $n+1$ osób, spośród których każde dwie się znają i oznaczmy go jako Z. Korzystając z założenia dla n osób spoza Z otrzymujemy, że istnieje taka osoba $x \in Z$, która zna wszystkie osoby spoza Z. Z własności zbioru Z wiemy, że zna również wszystkie osoby z tego zbioru. Wobec tego osoba x spełnia warunki zadania.

7 Pola

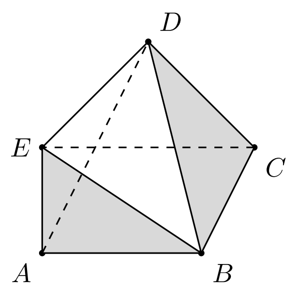
1. Z warunków zadania wynika, że proste AB i CD są równoległe, zatem, na mocy Twierdzenia 1, pola trójkątów ABD i ABC są równe. Otrzymujemy równości

$$\begin{aligned}[ADE] &= [ABD] - [ABE] \\ &= [ABC] - [ABE] \\ &= [BCE],\end{aligned}$$

czego należało dowieść.



Zadanie 1



Zadanie 2

2. Proste AD i BC są równoległe, więc na mocy Twierdzenia 1 zachodzi równość

$$[BCD] = [BCA].$$

Analogicznie, ponieważ proste CE i AB są równoległe, to

$$[BCA] = [BEA].$$

Łącząc powyższe dwie równości, otrzymujemy

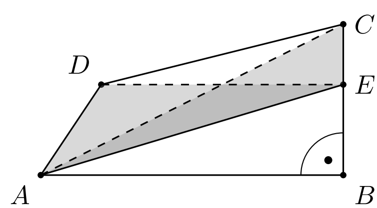
$$[BCD] = [BEA],$$

co było do udowodnienia.

3. Ponieważ odcinki AE i CD są równoległe, to na mocy Twierdzenia 1 zachodzi równość $[AEC] = [AED]$. Otrzymujemy stąd

$$\begin{aligned}[ABED] &= [ABE] + [AED] \\ &= [ABE] + [AEC] \\ &= [ABC] \\ &= \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25,\end{aligned}$$

czwarta równość zachodzi ponieważ kąt przy wierzchołku B jest prosty.



Zadanie 3

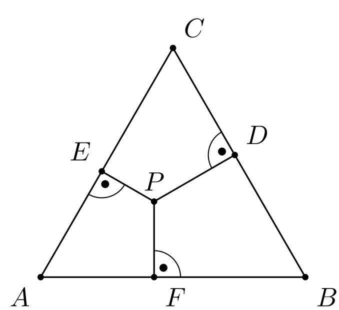
4. Niech a będzie długością boku trójkąta ABC. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}2[ABC] &= 2[BCP] + 2[CAP] + 2[ABP] = \\ &= BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF = \\ &= a \cdot PD + a \cdot PE + a \cdot PF = a(PD + PE + PF).\end{aligned}$$

Zatem

$$PD + PE + PF = \frac{2}{a}[ABC],$$

czyli wartość tego wyrażenia nie zależy od wyboru punktu P.

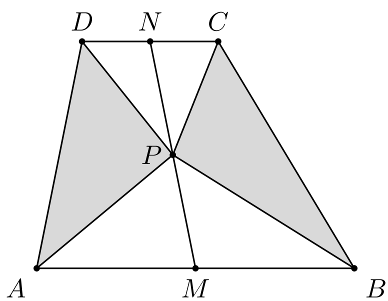


Zadanie 4

5. Zauważmy, że $[AMP]=[BMP]$, gdyż oba trójkąty mają równe podstawy AM i BM oraz wspólną wysokość, opuszczoną z wierzchołka P. Analogicznie uzasadniamy, że $[DNP]=[CNP]$.

Ponadto trapezy $AMND$ i $BMNC$ mają równe wysokości, a przy tym $AM=BM$ oraz $DN=CN$. Stąd $[AMND]=[BMNC]$. Łącząc uzyskane równości pól, otrzymujemy

$$[ADP]=[AMND]-[AMP]-[DNP]=$$
$$=[BMNC]-[BMP]-[CNP]=[BCP].$$



Zadanie 5

6. Rozpocznijmy rozwiązanie tego zadania od udowodnienia faktu pomocniczego. Jeśli $L\neq l$ oraz $M\neq m$ są niezerowymi liczbami rzeczywistymi i $\frac{L}{M}=\frac{l}{m}$, to

$$\frac{L}{M}=\frac{l}{m}=\frac{L-l}{M-m}.$$

Zauważmy, że następujące równości są równoważne:

$$\frac{L}{M}=\frac{l}{m},$$

$$mL=Ml,$$

$$mL-ml=Ml-ml,$$

$$m(L-l)=l(M-m),$$

$$\frac{l}{m}=\frac{L-l}{M-m},$$

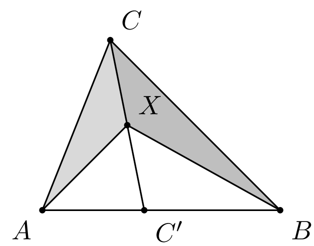
czego należało dowieść.

Przejdźmy teraz do rozwiązania zadania. Na mocy Twierdzenia 2:

$$\frac{[ACC']}{[BCC']}=\frac{[AXC']}{[BXC']}=\frac{AC'}{BC'},$$

zatem na mocy faktu pomocniczego prawdą jest, że

$$\frac{[ACX]}{[BCX]}=\frac{[ACC']-[AXC']}{[BCC']-[BXC']}=\frac{[AXC']}{[BXC']}=\frac{AC'}{BC'}.$$



Zadanie 6

7. Proste AF i PC są równoległe, więc na mocy Twierdzenia 1 zachodzi równość $[AFC]=[AFP]$. Dalej, proste AE i QC są równoległe, zatem $[AEC]=[AEQ]$. Dodając te równości stronami, otrzymujemy kolejno:

$$[AFC]+[AEC]=[AFP]+[AEQ],$$

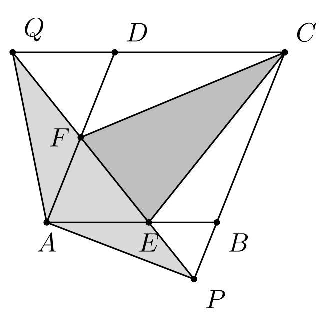
$$[AFCE]=[AFQ]+[AEP]+2[AEF],$$

$$[CFE]+[AEF]=[AFQ]+[AEP]+[AEF]+[AEF],$$

$$[CFE]=[AFQ]+[AEP]+[AEF],$$

$$[CFE]=[APQ],$$

czego należało dowieść.



Zadanie 7

8. Niech P i Q będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na prostą CD. Przyjmijmy ponadto oznaczenia:

$$DE = x, \quad CE = y, \quad AP = g, \quad BQ = h.$$

Z treści zadania wynika, że suma pól trójkątów ACE i BDE jest równa sumie pól trójkątów BCE i ADE. Otrzymujemy

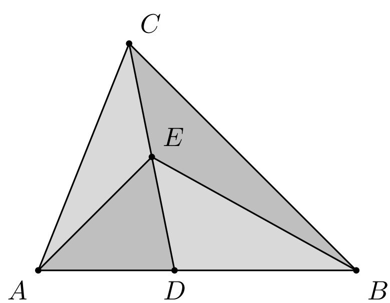
$$\frac{1}{2}yg + \frac{1}{2}xh = \frac{1}{2}yh + \frac{1}{2}xg,$$

$$yg + xh = yh + xg,$$

$$yg + xh - yh - xg = 0,$$

$$(g-h)(x-y) = 0,$$

Wobec powyższego zachodzi jedna z równości: $g = h$ lub $x = y$. Z równości $g = h$ wynika, że (być może zdegenerowane) trójkąty prostokątne ADP i BDQ są przystające (cecha kąt–bok–kąt), skąd wniosek, że punkt D jest środkiem odcinka AB. Z kolei równość $x = y$ oznacza, że punkt E jest środkiem odcinka CD.



Zadanie 8

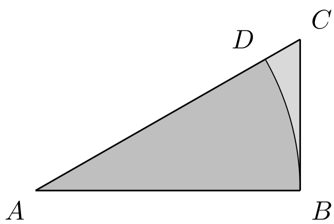
9. Rozpatrzmy okrąg ω o środku w A i promieniu AB. Zauważamy, że wycinek ω, który jest zawarty w trójkącie ABC ma mniejsze pole niż trójkąt ABC. Zapisując tę nierówność za pomocą wyrażeń algebraicznych, otrzymujemy, że

$$\frac{\sphericalangle BAC}{360^\circ} \cdot \pi \cdot AB^2 \leqslant \frac{1}{2} AB \cdot BC.$$

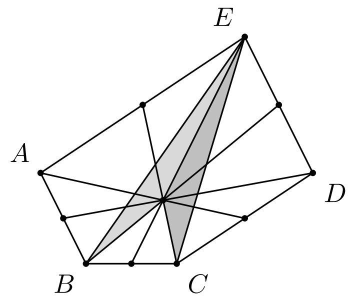
Przemnażając tę nierówność stronami przez $\frac{2}{AB}$, dostajemy

$$\frac{\sphericalangle BAC}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot AB \leqslant BC.$$

Pozostaje tylko zauważyć, że po lewej stronie równości mamy wzór na długość łuku BD zawartego w trójkącie ABC, a więc otrzymana nierówność jest równoważna tezie.



Zadanie 9



Zadanie 10

10. W tym rozwiązaniu będziemy korzystać z zadania 6.

Oznaczmy dany pięciokąt przez $ABCDE$. Niech środkowe poprowadzone z wierzchołków A, B, C i D przecinają się w punkcie P.

By wykazać, że środkowa poprowadzona z wierzchołka E przechodzi przez punkt P wystarczy wykazać, że prosta EP przechodzi przez środek odcinka BC. Oznaczmy punkt przecięcia prostej EP z odcinkiem BC jako M. Wówczas na mocy zadania 6 mamy, że

$$\frac{[EPB]}{[EPC]} = \frac{BM}{CM},$$

czyli punkt M będzie środkiem odcinka BC wtedy i tylko wtedy, gdy zajdzie równość

$$[EPB] = [EPC].$$

Tę równość postaramy się teraz udowodnić.

Prosta PB połowi odcinek ED, więc na mocy zadania 6. otrzymujemy, że $[EPB] = [DPB]$. W sposób analogiczny dostajemy równości:

$$[DPB] = [DPA],\ [DPA] = [CPA] \quad \text{oraz} \quad [CPA] = [CPE]$$

Łącząc otrzymane zależności, otrzymujemy, że $[EPB] = [CPE]$, czego należało dowieść.

8 Liczby całkowite i wymierne

1. Zauważmy, że skoro liczba $x+\frac{1}{x}$ jest całkowita, to liczba $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ również będzie całkowita. Korzystając ze wzoru skróconego mnożenia mamy

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2}+2.$$

Skoro liczba $x^2+\frac{1}{x^2}+2$ jest całkowita, to liczba $x^2+\frac{1}{x^2}$ również jest całkowita, co było do wykazania.

2. *Odpowiedź.* Istnieje 80 czwórek liczb spełniających to równanie.

Zauważmy, że

$$55 = ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d).$$

Z tego, że liczby a,b,c i d są całkowite dodatnie, wynika, że liczby $a+c$ oraz $b+d$ są całkowite oraz większe od 1. Wobec powyższego:

$$a+c=11 \quad \text{i} \quad b+d=5$$

lub

$$a+c=5 \quad \text{i} \quad b+d=11.$$

Równanie $a+c=11$ ma w liczbach naturalnych 10 rozwiązań, a równanie $b+d=5$ ma 4 rozwiązania. Zatem łącznie w pierwszym przypadku mamy $10\cdot 4=40$ rozwiązań. Z drugiego przypadku mamy kolejne 40 rozwiązań. Co daje łącznie $40+40=80$ rozwiązań.

3. Z danych równości można wywnioskować, że

$$a+b=bc-c \qquad \text{oraz} \qquad a+c=bc-b.$$

Zatem

$$(a+b)(a+c) = (bc-c)(bc-b) = b(b-1)c(c-1).$$

Jedna z liczb b, $b-1$ jest parzysta, podobnie jedna z liczb c, $c-1$ też jest parzysta, zatem ich iloczyn jest podzielny przez 4.

4. *Odpowiedź.* Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest 41.

Jeśli liczba $p+400$ jest kwadratem liczby całkowitej, to niech

$$p+400=a^2,$$

dla pewnej liczby całkowitej a. Wobec tego

$$p=a^2-400=a^2-20^2=(a+20)(a-20).$$

Skoro liczba p jest pierwsza, to

$$a+20=\pm 1 \quad \text{lub} \quad a-20=\pm 1,$$

a zatem

$$a=\pm 19 \quad \text{lub} \quad a=\pm 21.$$

Jeśli $a=\pm 19$, to

$$p=(\pm 19)^2-400=-39<0,$$

co zajść nie może. Jeśli $a=\pm 21$, to

$$p=(\pm 21)^2-400=41.$$

Liczba 41 jest jedyną liczbą pierwszą spełniającą warunki zadania.

Uwaga

Zapisując $a=\pm 19$ mamy na myśli, że $a=19$ albo $a=-19$.

5. *Sposób 1.*

Załóżmy, bez straty ogólności, że

$$a+b=2k+1, \quad b+c=2k+2, \quad a+c=2k+3,$$

dla pewnej liczby całkowitej k. Mamy

$$2a=(a+b)+(a+c)-(b+c),$$

skąd

$$a=\frac{(2k+1)+(2k+3)-(2k+2)}{2}=k+1,$$

Analogicznie uzasadniamy, że

$$b=\frac{(2k+1)+(2k+2)-(2k+3)}{2}=k,$$

$$c=\frac{(2k+3)+(2k+2)-(2k+1)}{2}=k+2.$$

Z powyższych równości wynika teza.

Sposób 2
Załóżmy, że

$$a+b<b+c<a+c.$$

Zauważmy, że

$$(b+c)-(a+b)=c-a=1 \quad \text{oraz} \quad (a+c)-(b+c)=a-b=1.$$

Wynika stąd, że każda następna liczba spośród b, a i c jest większa od poprzedniej o 1. Wystarczy więc wykazać, że liczba a jest całkowita. Mamy, że

$$(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c).$$

Po lewej stronie powyższej równości znajduje się suma dwóch liczb nieparzystych i jednej liczby parzystej, więc jest ona liczbę parzystą. Stąd prawa strona równości jest dwukrotnością liczby całkowitej, czyli liczba $a+b+c$ jest całkowita. Zauważmy, że

$$a=(a+b+c)-(b+c).$$

Skoro a może być przedstawiona w postaci różnicy liczb całkowitych, to jest to liczba całkowita. Dowód jest zakończony.

Uwaga
Należy zwrócić uwagę, że samo wykazanie, że zachodzą równości $a=b+1=c-1$ nie jest wystarczające. Należy jeszcze uzasadnić, że liczby a, b i c są całkowite. Brak takiego uzasadnienia jest pominięciem istotnej trudności zadania.

6. *Odpowiedź.* Jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi dane równanie są $(x,y)=(4,13)$, $(14,3)$, $(2,-9)$, $(-8,1)$.

Odejmijmy $2x+3y-6$ od obu stron danego równania. Otrzymujemy $xy-2x-3y+6=11$, co po zwinięciu do iloczynu daje

$$(x-3)(y-2)=11.$$

Zauważmy, że liczba 11 jest pierwsza, a więc jedynymi jej przedstawieniami w postaci iloczynowej są:

$$11=1\cdot 11=11\cdot 1=(-1)\cdot(-11)=(-11)\cdot(-1).$$

Gdy $x-3=1$ oraz $y-2=11$, to $(x,y)=(4,13)$. W pozostałych przypadkach otrzymujemy pary $(14,3)$, $(2,-9)$, $(-8,1)$.

7. Zauważmy, że skoro liczby a^2+b^2 oraz ab są wymierne, to wymierne będą również liczby

$$(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab \quad \text{oraz} \quad (a-b)^2=(a^2+b^2)-2ab.$$

Wiadomo, że

$$(a^2-b^2)^2=(a-b)^2(a+b)^2.$$

Skoro iloczyn dwóch liczb wymiernych jest liczbą wymierną, to na mocy powyższych wniosków otrzymujemy tezę.

8. Zauważmy, że zachodzi równość

$$\begin{aligned}2a^2+2b^2&=(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)=\\&=(a+b)^2+(a-b)^2.\end{aligned}$$

Skoro liczby a, b są całkowite, to liczby $a+b$ oraz $a-b$ również. Na mocy powyższej tożsamości mamy, że szukane przedstawienie zawsze istnieje.

9. Oznaczmy

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{b+c\sqrt{2}}=q,$$

dla pewnej liczby wymiernej q. Przekształcając powyższą równość równoważnie, otrzymujemy, że

$$a+b\sqrt{2}=qb+qc\sqrt{2},$$

$$a-qb=(qc-b)\sqrt{2}.$$

Jeśli $b\neq qc$, to

$$\frac{a-qb}{qc-b}=\sqrt{2}.$$

Lewa strona powyższej równości jest liczbą wymierną, a prawa strona liczbą niewymierną. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $b=qc$, czyli również $a=qb$. Mamy więc, że

$$\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}=\frac{qb^2+bc+qbc}{qb+qc+c}=b$$

Skoro liczba b jest całkowita, to powyższa zależność dowodzi postulowanej podzielności.

10. Rozpatrzmy $x=2+\sqrt{2}$ i $y=2-\sqrt{2}$. Wówczas

$$x+y=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$$

oraz

$$xy=(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})=4-2=2.$$

Istnieją więc liczby spełniające warunki zadania.

11. Zauważmy, że liczbę 0 można przedstawić w tej postaci. Istotnie zachodzą równości:

$$\frac{-2}{1}+\frac{6}{3}=0 \quad \text{oraz} \quad -2+6=1+3.$$

Weźmy dowolną niezerową liczbę wymierną i zapiszmy ją w postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz $p,\ q\neq 0$. Podstawmy

$$a=p, \quad b=-p, \quad c=2q \quad \text{oraz} \quad d=-2q.$$

Zauważmy, że $a+b=c+d=0$. Prawdziwa jest też równość

$$\frac{p}{2q}+\frac{-p}{-2q}=\frac{p}{2q}+\frac{p}{2q}=\frac{p}{q},$$

co kończy dowód.

12. *Odpowiedź.* Wyjściową równość spełniają jedynie pary (a,b) równe $(1,4)$, $(0,4)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Przekształćmy wyjściową równość równoważnie

$$a^2-a=b^2-5b+4,$$

$$4a^2-4a=4b^2-20b+16,$$

$$4a^2-4a+1=(4b^2-20b+25)-8,$$

$$(2a-1)^2=(2b-5)^2-8,$$

$$8=(2b-5)^2-(2a-1)^2=(2b-5-2a+1)(2b-5+2a-1),$$

$$2=(b-a-2)(b+a-3).$$

Wobec powyższego

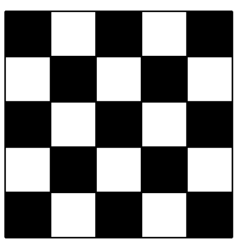
$$(b-a-2,\ b+a-3)\in\{(1,2),\ (2,1),\ (-2,-1),\ (-1,-2)\},$$

czyli $(a,b)\in\{(1,4),(0,4),(1,1),(0,1)\}$.

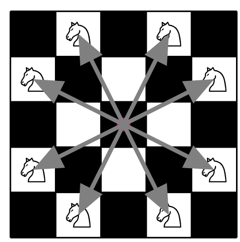
9 Plansze

1. Wykażemy, że szukane pokrycie nie jest możliwe. Pokolorujemy daną planszę jak szachownicę (zobacz rysunek). Zauważamy, że jest 12 pól białych i 13 pól czarnych.

Zauważmy, że domino 2×1 przykrywa dokładnie jedno pole białe i pole czarne. Zaś drugi klocek przykrywa jedno pole jednego koloru i cztery pola drugiego koloru. Z powyższych obserwacji wynika, że różnica liczby pól obu kolorów powinna wynosić dokładnie 3. Jednak $13 - 12 = 1 \neq 3$, czyli otrzymujemy sprzeczność dowodzącą, że szukane pokrycie nie istnieje.



Zadanie 1



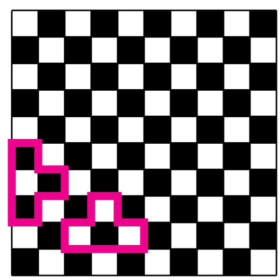
Zadanie 2

2. Udowodnimy nie wprost, że opisana sytuacja nie jest możliwa. Przypuśćmy przeciwnie, że skoczek najpierw obskoczył wszystkie pola dokładnie raz (zajęło mu to 24 ruchy, gdyż plansza ma 25 pól) i w następnym (dwudziestym piątym) ruchu wrócił na pole, z którego zaczął.

Pokolorujmy pola danej planszy jak szachownicę. Nietrudno zauważyć, że w każdym ruchu skoczek zmienia kolor pola, na którym stoi. Po 25 ruchach będzie zatem na polu innego koloru niż pole startowe, co przeczy hipotezie, iż po 25 ruchach skoczek wrócił na pole wyjściowe. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

3. Wykażemy, że kwadratu 10×10 nie można ułożyć z danych *T-klocków*. Gdyby z *T-klocków* dało się ułożyć kwadrat 10×10, klocków musiałoby być $\frac{10 \cdot 10}{4} = 25$, co jest liczbą nieparzystą.

Pokolorujmy pola planszy jak szachownicę. Każdy *T-klocek* pokrywa nieparzystą liczbę (1 lub 3) pól czarnych. Suma nieparzyście wielu liczb nieparzystych jest nieparzysta, więc liczba pokrytych czarnych pól byłaby nieparzysta. Z drugiej strony w kwadracie 10×10 liczba czarnych pól wynosi 50 i jest parzysta – uzyskana sprzeczność dowodzi, że takie ułożenie jest niemożliwe.



Zadanie 3

4. *Odpowiedź.* Maksymalną liczbą króli, którą można umieścić na szachownicy, aby żadne dwa z nich się nie biły jest 16.

Podzielmy szachownicę na 16 kwadratów 2×2 jak na rysunku. W jednym takim kwadracie może się znaleźć co najwyżej jeden król – dwa króle w jednym kwadracie 2×2 zawsze się biją – więc wszystkich króli na szachownicy może być co najwyżej 16.

Z drugiej strony, jeżeli w prawym dolnym rogu każdego kwadratu z opisanego podziału umieścimy króla, żadne dwa króle nie będą się bić (i będzie ich dokładnie 16).

	K		K		K		K
	K		K		K		K
	K		K		K		K
	K		K		K		K

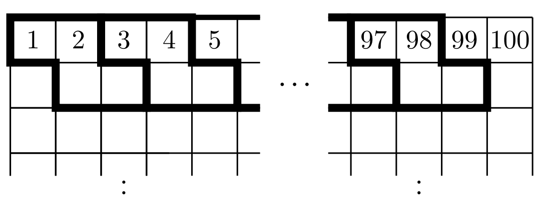
Zadanie 4

Uwaga
W powyższym zadaniu należało wyznaczyć maksymalną liczbę króli. Oznacza to, że należy wykonać dwa kroki: wskazać tę liczbę wraz z przykładem takiego ustawienia oraz udowodnić, że nie można umieścić większej ich liczby. Każda z tych dwóch części rozumowania jest ważna i nie może zostać pominięta w rozwiązaniu.

5. Udowodnimy nie wprost, że szukane pokrycie nie jest możliwe. Tym razem nie będziemy kolorować planszy, lecz przeanalizujemy jak będą ułożone *Z-klocki* leżące przy brzegu planszy.

Rozważmy pole w lewym górnym rogu tablicy. *Z-klocek*, który je pokrywa, musi też pokryć któreś z pól sąsiadujących z nim krawędzią. Ze względu na symetrię tablicy możemy bez straty ogólności założyć, że pole to leży przy górnej krawędzi tablicy.

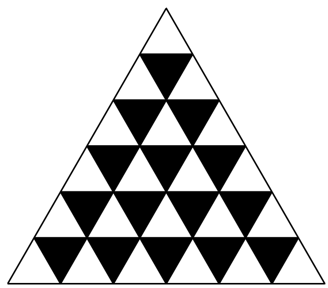
Ponumerujmy pola przy górnej krawędzi tablicy od 1 do 100, zaczynając od pola lewego górnego i kończąc na prawym górnym. Wtedy jeden *Z-klocek* przykrywa pola 1 i 2. Pole 3 może być przykryte tylko przy jednym ułożeniu *Z-klocka* – jeden *Z-klocek* pokryje wtedy pola 3 i 4.



Zadanie 5

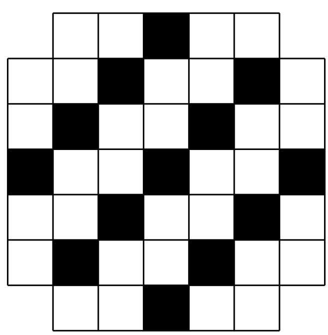
Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że jeden *Z-klocek* przykrywa pola o numerach 97 i 98 – jednakże wtedy nie można umieścić kolejnego *Z-klocka* tak, by przykrył on pole 99, a zarazem cały był zawarty w planszy. Oznacza to, że szukane pokrycie nie jest możliwe.

6. Udowodnimy, że nie można rozciąć trójkąta w zadany sposób. Pokolorujmy dany trójkąt tak jak na załączonym rysunku. Nietrudno zauważyć, że każdy klocek pokrywa 2 białe i 2 czarne trójkąty. Jednakże, pól białych jest $1+2+\cdots+6=21$, zaś pól czarnych: $1+2+\cdots+5=15$. Pól białych jest więc więcej niż czarnych, wobec czego nie można rozciąć danego trójkąta na klocki, z których każdy ma tyle samo pól białych co czarnych.



Zadanie 6

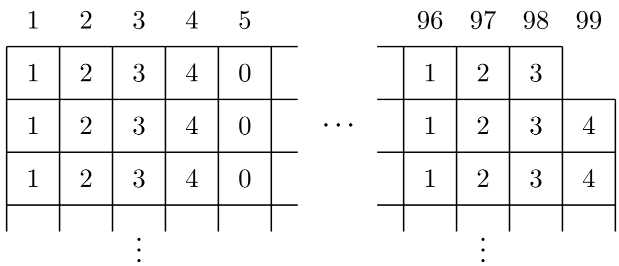
7. Pokolorujmy planszę tak jak na rysunku. Zauważmy, że każdy klocek przykrywa dokładnie jedno kolorowe pole.



Zadanie 7

Po usunięciu narożników pozostanie 13 kolorowych pól, czyli tyle klocków musimy użyć do pokrycia planszy. Z drugiej zaś strony, skoro pól do pokrycia jest $49-4=45$, a każdy klocek przykrywa dokładnie 3 pola, to powinno ich być dokładnie $\frac{45}{3}=15$. Powyższa sprzeczność dowodzi, że nie możemy tak pokryć planszy danymi klockami.

8. Ponumerujmy kolumny planszy od 1 do 99. Przyjmijmy bez straty ogólności, że usunięty narożnik znajdował się w 99-tej kolumnie. W każde pole wpiszmy resztę z dzielenia przez 5 numeru kolumny, w której to pole się znajduje.



Zadanie 8

Udowodnimy, iż każdy prostokąt 1×5 przykrywa pola o sumie podzielnej przez 5. Istotnie, gdy prostokąt jest ustawiony „pionowo" (cały jest zawarty w jednej kolumnie), pokrywa 5 pól z tą samą liczbą – suma pięciu równych liczb jest zaś podzielna przez 5. Gdy prostokąt jest ustawiony „poziomo", pokrywa po jednym polu z 5 kolejnych kolumn. Z definicji numerowania wynika, że w pokryte pola wpisane są liczby 0, 1, 2, 3, 4 (w pewnej kolejności), których suma wynosi 10, więc jest podzielna przez 5.

Obliczmy teraz sumę liczb w polach całej tablicy. Jest w niej 20 kolumn z jedynkami, 20 z dwójkami, 20 z trójkami, 20 kolumn (w tym jedna pozbawiona pola – wierzchołka tablicy) z czwórkami i 19 kolumn z zerami. Suma liczb wpisanych w tablicę wynosi więc

$$20 \cdot (1+2+3+4) - 4 = 196,$$

co nie jest podzielne przez 5. Skoro każdy prostokąt pokrywa pola z liczbami o sumie podzielnej przez 5, to gdyby danymi prostokątami dało się pokryć daną planszę, suma liczb wpisanych w pola całej planszy również musiałaby być podzielna przez 5.

Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie możemy pokryć danej tablicy prostokątami 1×5.

9. Udowodnimy nie wprost, że szukane pokrycie nie jest możliwe. Załóżmy więc, że pokryto tablicę 1000×1000 w zadany sposób, bez straty ogólności załóżmy również, że dłuższe boki prostokątów podziału są poziome.

Wpiszmy w pola pierwszego wiersza liczby 1, w pola drugiego: 0, trzeciego: -1 i w kolejnych wierszach analogicznie, tj. w wiersze o numerach postaci $3k+1$ wpisujemy 1, w wiersze o numerach postaci $3k+2$ wpisujemy 0, zaś w wiersze o numerach postaci $3k$ wpisujemy -1.

1	1	1	
0	0	0	
-1	-1	-1	$\cdots$
1	1	1	
0	0	0	
	$\vdots$		$\ddots$

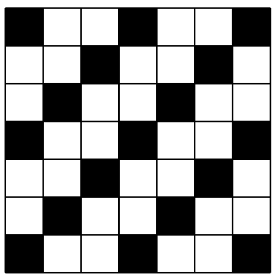
Zadanie 9

Zauważmy, że suma liczb przykrytych przez prostokąt 3×5 o poziomym dłuższym boku zawsze wynosi 0. Analogicznie każdy prostokąt 2×7 o boku poziomym 7 przykrywa pola o sumie -7, 0 lub 7. Oznacza to, że oba rodzaje klocków pokrywają zawsze pola o sumie podzielnej przez 7 – jeżeli więc można nimi wypełnić tablicę, to suma liczb w polach całej tablicy musi być podzielna przez 7.

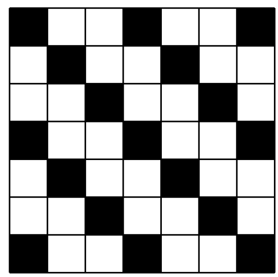
Jednakże w tablicy są 334 wiersze z jedynkami, 333 wiersze z zerami i 333 wierszy z minus jedynkami, więc suma liczb w tablicy wynosi 1000, co nie jest liczbą podzielną przez 7. Uzyskana sprzeczność kończy dowód nie wprost.

10. Pokolorujmy planszę tak jak na pierwszym załączonym rysunku. Każdy klocek 3×1 pokrywa dokładnie jedno kolorowe pole. Pól kolorowych jest 17 zaś klocków 3×1 jest 16 – zatem jedno z kolorowych pól będzie pokryte klockiem 1×1.

Pokolorujmy planszę tak jak na drugim rysunku. Rozumując analogicznie jak w poprzednim akapicie, otrzymujemy, że klocek 1×1 leży na jednym z pokolorowanych pól.

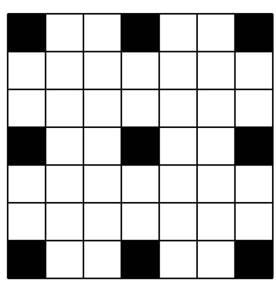


Zadanie 10 – rysunek 1



Zadanie 10 – rysunek 2

Więc klocek 1×1 musi leżeć na polu, które jest pokolorowane niezależnie od tego czy kolorujemy tak jak na pierwszym czy na drugim rysunku. Wszystkie takie pola poza środkowym leżą przy brzegu planszy.



Zadanie 10 – rysunek 3

10 Twierdzenie Talesa

1. Zauważmy, że z twierdzenia Talesa z równoległość prostych AB i XY wynika zależność

$$\frac{CX}{AC} = \frac{CY}{CB} = \frac{CY}{CY+BY} = \frac{CY}{3CY} = \frac{1}{3},$$

co jest równoważne równości $\frac{CX}{CX+AX} = \frac{1}{3}$, którą przekształcić można równoważnie do postaci

$$3CX = CX + AX = 2CX + CY, \quad \text{czyli} CX = CY.$$

Pozostaje zauważyć, że z powyższej równości wynika

$$AC = CX + AX = 2CX + CY = 3CY = CY + BY = BC,$$

czego należało dowieść.

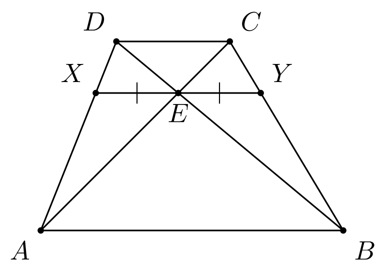
2. Korzystając z twierdzenia Talesa dla prostych równoległych AB i EX oraz punktu D, otrzymujemy

$$\frac{XE}{AB} = \frac{DE}{DB} \quad \text{i podobnie} \quad \frac{CE}{CA} = \frac{EY}{AB}.$$

Teraz z twierdzenia Talesa dla prostych równoległych AB i CD oraz punktu E otrzymujemy

$$\frac{DE}{DB} = \frac{CE}{CA}.$$

Łącząc powyższe trzy równości, otrzymujemy $\frac{XE}{AB} = \frac{EY}{AB}$, zatem E jest środkiem odcinka XY.



Zadanie 2

3. Z twierdzenia Talesa dla prostych DE i AB oraz punktu C wiemy, że skoro

$$\frac{CD}{CA} = \frac{1}{3} = \frac{CE}{CB},$$

to proste DE i AB są równoległe. Ponownie z twierdzenia Talesa w tej samej konfiguracji otrzymujemy

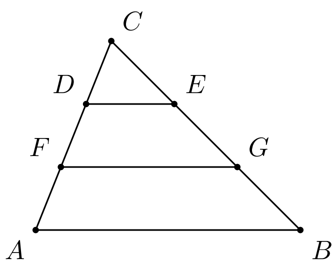
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \frac{1}{3}.$$

Analogicznie otrzymujemy $FG \parallel AB$ i

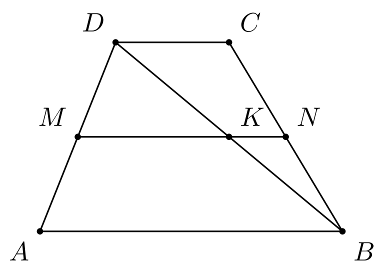
$$\frac{FG}{AB} = \frac{CF}{CA} = \frac{2}{3}.$$

Dodając otrzymane równości, dostajemy

$$DE + FG = \frac{1}{3}AB + \frac{2}{3}AB = AB.$$



Zadanie 3



Zadanie 4

4. Niech K oznacza środek przekątnej BD. Punkty M, K dzielą odpowiednio odcinki DA, DB na połowy, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa uzyskujemy $MK||AB$, a stąd, korzystając już z twierdzenia Talesa, mamy

$$2MK = AB.$$

Analogicznie dowodzimy, że $NK||CD$ oraz

$$2KN = CD.$$

Uzyskane równoległości wraz z założeniem $AB||CD$ oznaczają, że $MK||NK$. Stąd punkty M, K i N są współliniowe. W takim razie

$$MN = MK + KN = \frac{AB + CD}{2}.$$

5. Na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa zastosowanego dla prostych AB i PQ oraz punktu X, z równości

$$\frac{AX}{PX} = \frac{BX}{QX}$$

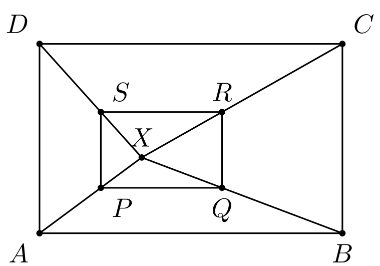
wnioskujemy, że $PQ \parallel AB$. Analogicznie można wykazać, że $QR \parallel BC$. Wobec tego

$$\sphericalangle PQR = \sphericalangle ABC = 90°.$$

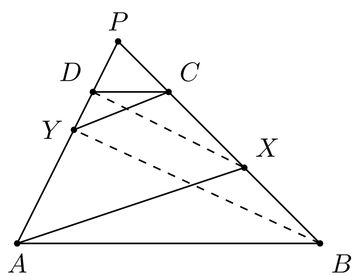
Podobnie dowodzimy, że

$$\sphericalangle QRS = \sphericalangle RSP = \sphericalangle SPQ = 90°,$$

wobec czego $PQRS$ jest prostokątem.



Zadanie 5



Zadanie 6

6. Skoro z założenia trapez $ABCD$ nie jest równoległobokiem, to proste AD i BC przecinają się w pewnym punkcie P.

Skoro proste AB oraz CD są do siebie równoległe, to na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC}.$$

Z założenia proste AX i CY również są do siebie równoległe, skąd

$$\frac{PY}{PA} = \frac{PC}{PX}.$$

Mnożąc powyższe równości stronami, otrzymujemy, że

$$\frac{PY}{PD} = \frac{PB}{PX},$$

skąd wynika, że proste BY i DX są do siebie równoległe.

7. Z twierdzenia Talesa dla prostych równoległych CD i EF oraz punktu A mamy

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AE}{EC},$$

zaś z twierdzenia Talesa dla prostych równoległych AB i CD oraz punktu E mamy

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{CD}.$$

Korzystając z powyższych wniosków i równości $AB+CD=AD$, otrzymujemy

$$\frac{AD}{FD}=\frac{AF}{FD}+1=\frac{AB}{CD}+1=\frac{AB+CD}{CD}=\frac{AD}{CD}.$$

W takim razie $FD=CD$, a skoro $\frac{AF}{FD}=\frac{AB}{CD}$, to

$$AF=AB.$$

Skoro trójkąt CDF jest równoramienny, a $CD\,||\,EF$, to

$$\sphericalangle EFC=\sphericalangle FCD=\sphericalangle CFD$$

skąd

$$\sphericalangle 2EFC=\sphericalangle EFD.$$

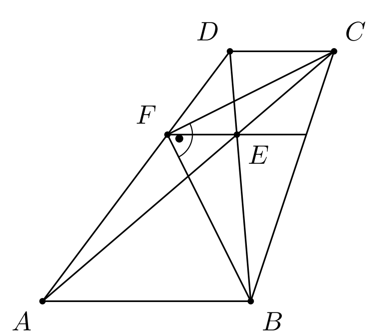
Analogicznie dowodzimy, że

$$2\sphericalangle EFB=\sphericalangle EFA.$$

Zatem

$$\sphericalangle BFC=\sphericalangle EFC+\sphericalangle EFB=\frac{\sphericalangle EFD+\sphericalangle EFA}{2}=90°,$$

co należało udowodnić.



Zadanie 7

8. Niech M będzie środkiem boku AB, i jednocześnie środkiem rozważanego półokręgu. Zauważmy najpierw, że z zadanej równości łuków wynika równość kątów

$$\sphericalangle AMD = \sphericalangle DME = \sphericalangle EMB,$$

a skoro suma miar tych kątów równa jest 180°, to każdy z nich ma miarę 60°. Z równości

$$AM = DM \quad \text{i} \quad \sphericalangle AMD = 60^\circ$$

wynika, że trójkąt AMD jest równoboczny. Stąd

$$\sphericalangle CBA = 60^\circ = \sphericalangle BAD,$$

więc

$$AD \parallel BC.$$

Oznaczmy przecięcie prostych CD oraz AB przez X. Korzystając z twierdzenia Talesa dla prostych równoległych AD i BC oraz punktu X, otrzymujemy

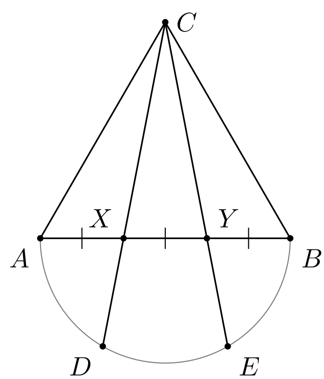
$$\frac{AX}{XB} = \frac{AD}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Zatem

$$AB = AX + XB = AX + 2AX = 3AX.$$

Analogicznie pokazujemy, że jeśli Y jest punktem przecięcia prostych CE oraz AB, to $AB = 3YB$, co oczywiście daje

$$AX = XY = YB.$$



Zadanie 8

9. Zauważmy, że trójkąty ABD, ABM oraz ABC mają wspólną podstawę AB. Oznaczmy jej długość przez a. Niech C', M' i D' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio C, M i D na prostą AB. Ze wzoru na pole trójkąta mamy, że

$$2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot CC' \quad \text{oraz} \quad 6 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot DD'.$$

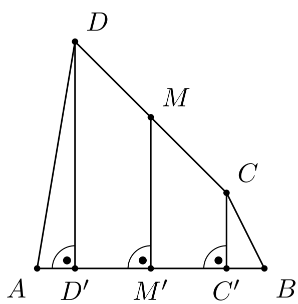
Skoro proste CC', MM' i DD' są prostopadłe do prostej AB, to są do siebie równoległe. W takim razie czworokąt $CC'D'D$ jest trapezem, M jest środkiem boku CD i MM' jest równoległa do podstaw.

Na mocy zadania 4 wnioskujemy, że

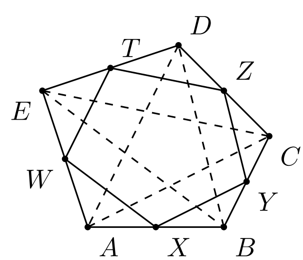
$$2MM' = CC' + DD',$$

czyli pole trójkąta ABM wynosi

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot MM' = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{CC' + DD'}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot (2+6) = 4.$$



Zadanie 9



Zadanie 10

10. Stosując twierdzenie Talesa dla prostych równoległych AC i XY oraz punktu B, mamy

$$\frac{AX}{XB} = \frac{CY}{YB}.$$

Analogicznie otrzymujemy ciąg równości

$$\frac{AX}{XB} = \frac{CY}{YB} = \frac{CZ}{ZD} = \frac{ET}{TD} = \frac{EW}{WA} = \frac{BX}{XA}.$$

Zatem $AX = BX$, co należało dowieść.

11 Działania na pierwiastkach

1. Wystarczy zauważyć, że zachodzą następujące równości:

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = 2+\sqrt{3},$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2-\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2} = 2-\sqrt{3}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} + \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right) = 4.$$

2. Podnieśmy daną równość stronami do kwadratu, a następnie przekształćmy równoważnie, uzyskując kolejno:

$$a-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)}+b-c = a+b,$$

$$\sqrt{(a-c)(b-c)} = c,$$

$$(a-c)(b-c) = c^2.$$

Jeśli liczby a, b, c są wszystkie nieparzyste, to lewa strona ostatniej równości jest liczbą parzystą, a prawa — liczbą nieparzystą. Uzyskana sprzeczność oznacza, że nie istnieje trójka liczb spełniająca warunki zadania.

3. *Odpowiedź.* Nie istnieją liczby spełniające warunki zadania.

Zauważamy, że zachodzi nierówność

$$\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geqslant x.$$

Analogicznie rozumując, wykazujemy, że $\sqrt{y^2+1} > y$. Stąd

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} > x+y,$$

czyli liczby spełniające warunki zadania nie istnieją.

4. Zauważamy, że zachodzi równość

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)} = \\ = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} = \\ = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\ldots+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right) = \\ = \sqrt{99}-\sqrt{1} < 10-1 = 9.$$

5. *Odpowiedź.* Podane wyrażenie jest równe 4.

Zauważamy, że zachodzą równości

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3},$$

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-4\sqrt{3}.$$

Łatwo sprawdzić, że liczby, które podnosimy do kwadratu, są dodatnie. Stąd mamy, że

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = \\ = \left(2+\sqrt{3}\right)+\left(2-\sqrt{3}\right) = 4.$$

Więc istotnie jest to liczba całkowita i wynosi ona 4.

6. Wystarczy pokazać, że $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}$. Pozostałe nierówności udowodnimy analogicznie.

Skoro obie strony powyższej nierówności są dodatnie, to wystarczy udowodnić tę nierówność podniesioną do kwadratu stronami

$$a+b+2\sqrt{ab} > c.$$

Wiemy jednak, że $a+b > c$, bo z odcinków o długościach a, b i c można zbudować trójkąt. Czyli istotnie zachodzi nierówność

$$a+b+2\sqrt{ab} > a+b > c.$$

7. *Odpowiedź.* Jedynymi parami dodatnich liczb całkowitych spełniającymi daną równość są $(m,n)=(3,4)$, $(4,3)$.

Przenieśmy $m+n$ na lewą stronę równania i podnieśmy do kwadratu stronami:

$$mn-m-n=\sqrt{m^2+n^2},$$

$$m^2n^2+m^2+n^2-2m^2n-2mn^2+2mn=m^2+n^2,$$

$$m^2n^2-2m^2n-2mn^2+2mn=0.$$

Dzieląc powyższe równanie stronami przez $mn\neq 0$, otrzymujemy, że

$$mn-2m-2n+2=0,$$

czyli równoważnie

$$(m-2)(n-2)=2.$$

Zauważmy, że $m-2, n-2\geqslant -1$. Skoro iloczyn tych liczb jest dodatni, to muszą być one tego samego znaku. Gdyby obie były równe -1, to ich iloczyn wyniósłby 1.

Stąd obie są liczbami dodatnimi, a liczba 2 daje się przestawić w postaci iloczynu dwóch dodatnich liczb całkowitych jako $2=1\cdot 2=2\cdot 1$.

Więc jedynymi parami liczb całkowitych spełniającymi tę równość są $(m,n)=(3,4)$, $(4,3)$. Podstawiając te pary do wyjściowego równania, otrzymujemy, że są one jego jedynymi rozwiązaniami.

8. Niech $x=\sqrt{100^n+2}$. Udowodnimy, że w zapisie dziesiętnym liczby x, na każdym miejscu od pierwszego do n-tego po przecinku, stoi cyfra 0.

Zauważmy, że $x=\sqrt{100^n+2}>\sqrt{100^n}$, czyli $x>10^n$. Z drugiej strony

$$x^2=100^n+2<100^n+2+\frac{1}{100^n}=\left(10^n+\frac{1}{10^n}\right)^2,$$

a zatem $x<10^n+\frac{1}{10^n}$.

Podsumowując, mamy $10^n<x<10^n+\frac{1}{10^n}$, z czego wynika teza.

9. Przemnóżmy wyjściową równość przez $\sqrt{x^2+1}-x$, dostając

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{y^2+1}+y\right)=\sqrt{x^2+1}-x.$$

Ze wzoru na różnicę kwadratów, mamy

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=x^2+1-x^2=1,$$

to

$$\sqrt{y^2+1}+y=\sqrt{x^2+1}-x.$$

Analogicznie, mnożąc wyjściową równość przez $\sqrt{y^2+1}-y$, otrzymamy równość:

$$\sqrt{x^2+1}+x=\sqrt{y^2+1}-y.$$

Dodając powyższe równości stronami, otrzymamy

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+x+y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}-x-y,$$

czyli po uproszczeniu

$$x+y=-x-y,$$

skąd uzyskujemy żądaną równość $x+y=0$.

10. Zauważamy, że każdy składnik wyjściowej sumy jest nie mniejszy niż $\frac{1}{\sqrt{2019}}$, przy czym wszystkie poza ostatnim są ostro większe. Stąd możemy wywnioskować, że zachodzi nierówność

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2019}}>$$
$$>2019\cdot\frac{1}{\sqrt{2019}}=\sqrt{2019}>\sqrt{1600}=40.$$

12 NWD i NWW

1. Na mocy Twierdzenia ze skryptu, zachodzą równości

$$\begin{aligned}\mathrm{NWD}(2n+1, 3n+1) &= \mathrm{NWD}(2n+1, 3n+1-(2n+1)) =\\ &= \mathrm{NWD}(2n+1, n) =\\ &= \mathrm{NWD}(2n+1-2n, n) =\\ &= \mathrm{NWD}(1, n) = 1,\end{aligned}$$

co dowodzi tego, że liczby $2n+1$ oraz $3n+1$ są zawsze względnie pierwsze.

2. Zauważmy, że

$$\frac{a}{\mathrm{NWD}(a,b)} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\mathrm{NWD}(a,b)}$$

są dodatnimi liczbami całkowitymi. Ponadto są one różne, ponieważ liczby a i b są różne. Wobec tego:

$$3 = 1+2 \leqslant \frac{a}{\mathrm{NWD}(a,b)} + \frac{b}{\mathrm{NWD}(a,b)} = \frac{a+b}{\mathrm{NWD}(a,b)},$$

zatem $\mathrm{NWD}(a,b) \leqslant \frac{a+b}{3}$.

3. Załóżmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b$. Liczba $\mathrm{NWW}(a,b)$ jest w szczególności wielokrotnością liczby a, więc mamy dwa przypadki: albo $\mathrm{NWW}(a,b) = a$, albo $\mathrm{NWW}(a,b) \geqslant 2a$.

Jeśli $\mathrm{NWW}(a,b) \geqslant 2a$, to mamy

$$\mathrm{NWW}(a,b) + \mathrm{NWD}(a,b) \geqslant \mathrm{NWW}(a,b) \geqslant 2a \geqslant a+b.$$

Jeśli zaś $\mathrm{NWW}(a,b) = a$, to liczba a jest także wielokrotnością liczby b. Wtedy b jest dzielnikiem liczby a, więc $\mathrm{NWD}(a,b) = b$, czyli

$$\mathrm{NWW}(a,b) + \mathrm{NWD}(a,b) = a+b,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

4. *Odpowiedź.* Największa taka liczba n to 890.

Korzystając z Twierdzenia ze skryptu, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\mathrm{NWD}(n^3+100, n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(n^3+100-n^2(n+10), n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(10n^2-100, n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(10n^2-100-10n(n+10), n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(100n+100, n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(100n+100-100(n+10), n+10) = \\
=&\mathrm{NWD}(900, n+10)
\end{aligned}$$

Z podzielności danej w zadaniu wynika, że

$$\mathrm{NWD}(n^3+100, n+10) = n+10,$$

a zatem $\mathrm{NWD}(900, n+10) = n+10$, więc $n+10 \mid 900$. Stąd wniosek, że $n \leqslant 890$.

Dla $n = 890$ mamy $\mathrm{NWD}(900, n+10) = n+10$, więc podzielność z treści zadania zachodzi.

5. *Odpowiedź.* Jedyną taką dodatnią liczbą całkowitą jest $n = 1$.

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$, $a = dx$, $b = dy$. Wtedy liczby x i y są względnie pierwsze, a skoro $a \neq b$, to $x \neq y$. Otrzymujemy

$$d^n(x^n - y^n) \mid d^n(x^n + y^n), \quad \text{czyli} \quad x^n - y^n \mid x^n + y^n.$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
&x^n - y^n \mid x^n + y^n + (x^n - y^n) = 2x^n \quad \text{oraz} \\
&x^n - y^n \mid x^n + y^n - (x^n - y^n) = 2y^n,
\end{aligned}$$

więc

$$x^n - y^n \mid \mathrm{NWD}(2x^n, 2y^n) = 2\mathrm{NWD}(x^n, y^n) = 2.$$

Stąd $|x^n - y^n| \leq 2$, co nie jest możliwe dla $x \neq y$ i $n > 1$, ponieważ kolejne n-te potęgi liczb całkowitych są coraz dalej od siebie.

Oczywiście $n = 1$ spełnia warunek zadania, wystarczy bowiem rozważyć $a = 2$ i $b = 1$.

6. Niech $e = \mathrm{NWD}(a,b)$, $a = ex$, $b = ey$. Wtedy $\mathrm{NWD}(x,y) = 1$. Z założeń zadania mamy

$$d \mid e(x+y) \quad \text{oraz} \quad d^2 \mid e^2xy.$$

W takim razie d^2 jest wspólnym dzielnikiem liczb $e^2(x+y)^2$ i e^2xy. Wobec tego

$$d^2 \mid \mathrm{NWD}\Big(e^2(x+y)^2, e^2xy\Big) =$$
$$= e^2 \cdot \mathrm{NWD}\Big((x+y)^2, xy\Big) = e^2,$$

przy czym pierwsza równość zachodzi na mocy Faktu 1 ze skryptu, zaś drugą równość uzasadniamy podobnie jak w Przykładzie 2. Ponieważ $d^2 \mid e^2$, to $d \mid e$, wobec czego $d \mid ex = a$ i $d \mid ey = b$.

7. Skoro liczba

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2+a}{ab} + \frac{b^2+b}{ab} = \frac{a^2+b^2+a+b}{ab}$$

jest całkowita, to

$$ab \mid a^2+b^2+a+b.$$

Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$ i $a = dx$, $b = dy$. Wtedy $\mathrm{NWD}(x,y) = 1$. Mamy

$$d^2xy \mid d^2(x^2+y^2) + d(x+y) = d(x+y)(d(x+y)+1) - 2d^2xy,$$

więc

$$dxy \mid (x+y)(d(x+y)+1), \quad \text{czyli} \quad d \mid (x+y)(d(x+y)+1).$$

Oczywiście $\mathrm{NWD}(d, d(x+y)+1) = 1$, więc $d \mid x+y$. Skoro liczby te są dodatnie, to

$$d \leqslant x+y,$$

zatem $d^2 \leqslant dx+dy = a+b$, więc ostatecznie $d \leqslant \sqrt{a+b}$.

8. Niech $d = \mathrm{NWD}(a,b)$, $a = dx$, $b = dy$. Wtedy $\mathrm{NWD}(x,y) = 1$. Z założeń zadania mamy, że

$$dx+dy \mid d^2xy, \quad \text{więc} \quad x+y \mid dxy.$$

Podobnie jak w Przykładzie 2 dowodzimy, że $\mathrm{NWD}(x+y, xy) = 1$. Wobec tego na mocy Faktu 2 zachodzi $x+y \mid d$. Skoro $x+y$ i d są dodatnie, to $x+y \leq d$. Wówczas $a+b = dx+dy \leqslant d^2$, więc $\sqrt{a+b} \leqslant d$.

9. *Odpowiedź.* Największą wartością wyrażenia jest $4m+1$.

Z Twierdzenia ze skryptu otrzymujemy następujące równości

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{NWD}(n^2+m,(n+1)^2+m) = \\
=&\mathrm{NWD}(n^2+m,(n+1)^2+m-(n^2+m)) = \\
=&\mathrm{NWD}(n^2+m,2n+1) = \\
\overset{*}{=}&\mathrm{NWD}(2(n^2+m),2n+1) = \\
=&\mathrm{NWD}(2n^2+2m-n(2n+1),2n+1) = \\
=&\mathrm{NWD}(2m-n,2n+1) = \\
\overset{**}{=}&\mathrm{NWD}(4m-2n,2n+1) = \mathrm{NWD}(4m+1,2n+1) \leqslant 4m+1,
\end{aligned}
$$

przy czym równości $*$ i $**$ zachodzą, ponieważ $2n+1$ jest liczbą nieparzystą. Zatem wyrażenie z zadania nie jest większe od $4m+1$. Co więcej, wartość ta jest osiągalna, na przykład dla $n=2m$.

10. *Odpowiedź.* Liczba $m=1$ lub $m=2^k+2$ dla $k \geq 0$.

Zauważmy, że zachodzą równości

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{NWD}(mn+1,2n+1) = \mathrm{NWD}(2mn+2,2n+1) = \\
=&\mathrm{NWD}(2mn+2-m(2n+1),2n+1) = \mathrm{NWD}(m-2,2n+1).
\end{aligned}
$$

Pierwsza równość jest prawdziwa, ponieważ liczba $2n+1$ jest zawsze nieparzysta, a druga wynika z Twierdzenia 1 ze skryptu.

Gdyby liczba $m-2$ była podzielna przez nieparzystą liczbę $k>1$, to biorąc $n=\frac{k-1}{2}$, otrzymalibyśmy, że

$$\mathrm{NWD}(m-2,2n+1) = \mathrm{NWD}(m-2,k) \geqslant k > 1,$$

więc m nie spełniałoby warunku z zadania.

Stąd wniosek, że liczba $m-2$ nie może mieć nieparzystych dzielników większych od 1, a zatem jej wartość bezwzględna jest potęgą dwójki, więc $|m-2| = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 0$.

Jeśli $m-2<0$, to warunek $m>0$, oznacza, że $m=1$. Jeśli zaś $m-2 \geqslant 0$, to $m-2 = |m-2| = 2^k$, zatem $m=2^k+2$.

Jeśli liczba m jest takiej postaci, to liczba $m-2$ nie ma nieparzystych dzielników większych od 1, więc na podstawie naszego rozumowania taka liczba m spełnia warunek zadania.

13 Podwójne zliczanie

1. Przypuśćmy, że taki podział istnieje. Niech G oznacza sumę liczb w jednej grupie. Wówczas

$$4G = G + G + G + G = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{20 \cdot 21}{2} = 210,$$

co zajść nie może, ponieważ G jest liczbą całkowitą, a 210 nie dzieli się przez 4. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukany podział nie istnieje.

2. Niech K oznacza liczbę kółek zainteresowań. Niech P oznacza zbiór par postaci (uczeń u, kółko k), że uczeń u uczęszcza na kółko k. Oszacujemy liczbę $|P|$ na dwa sposoby.

Ponieważ każdy z trzystu uczniów uczęszcza na co najmniej dziesięć kółek, to każdy uczeń u jest w przynajmniej dziesięciu parach należących do zbioru P, zatem $|P| \geqslant 300 \cdot 10 = 3000$.

Ponieważ na każde kółko chodzi co najwyżej dziesięcioro uczniów, to każde kółko k jest w co najwyżej dziesięciu parach należących do zbioru P, zatem $10K \geqslant |P|$.

Łącząc otrzymane nierówności, otrzymujemy, że $10K \geqslant 3000$, skąd wniosek, że $K \geqslant 300$, co należało dowieść.

3. Przyporządkujmy każdej ścianie liczbę jej boków. Oznaczmy sumę tych liczb przez K. Z założeń zadania wiemy, że wszystkie rozpatrywane liczby są podzielne przez 4, więc K również jest liczbą podzielną przez 4.

Ponieważ każda krawędź należy dokładnie do dwóch ścian wielościanu, to została w ten sposób policzona dwukrotnie, zatem K jest też podwojoną liczbą krawędzi.

Wobec tego teza zadania sprowadza się do wykazania, że liczba $\frac{1}{2}K$ jest liczbą parzystą, co jest oczywiste, ponieważ K dzieli się przez 4.

4. Przypuśćmy, że taka numeracja istnieje. Niech K i W oznaczają odpowiednio sumę liczb wpisanych w krawędzie i wierzchołki.

Każda krawędź zawiera dokładnie dwa wierzchołki wielościanu. Stąd liczba zapisana na jednej krawędzi wejdzie w skład sumy liczb z wierzchołków dwukrotnie, czyli

$$W = 2K = 2\cdot(1+2+\ldots+30) = 2\cdot\frac{30\cdot 31}{2} = 2\cdot 465.$$

Ponieważ, każda liczba wpisana w wierzchołek jest podzielna przez 4, zatem liczba W też jest podzielna przez 4, co jest niemożliwe, gdyż $W = 2\cdot 465$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukana numeracja nie istnieje.

5. *Odpowiedź.* Najmniejsza możliwa liczba zer to 11.

Niech k_1, k_2, …, k_{11} oznaczają sumy liczb znajdujących się w kolejnych kolumnach, a w_1, w_2, …, w_{11} — sumy w kolejnych wierszach. Niech S będzie sumą wszystkich liczb z tablicy.

Z warunków zadania wynika, że $k_1 \geqslant 0,\ k_2 \geqslant 0, \ldots,\ k_{11} \geqslant 0$, zatem

$$S = k_1 + k_2 + \ldots + k_{11} \geqslant 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Podobnie, skoro $w_1 \leqslant 0,\ w_2 \leqslant 0, \ldots,\ w_{11} \leqslant 0$, to

$$S = w_1 + w_2 + \ldots + w_{11} \leqslant 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

Łącząc powyższe nierówności, dochodzimy do wniosku, że $S = 0$. Zatem we wszystkich powyższych nierównościach zachodzą równości, czyli

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_{11} = w_1 = w_2 = \ldots = w_{11} = 0.$$

Ponieważ suma liczb w każdym wierszu jest równa 0, więc w każdym wierszu jest tyle samo liczb 1 co liczb -1. W każdym wierszu jest zatem parzysta liczba niezerowych liczb. Skoro w każdym wierszu wpisanych jest nieparzyście wiele liczb – 11, to w każdym wierszu wpisana jest co najmniej jedna liczba 0, zatem w całej tablicy znajduje się co najmniej 11 zer.

Pozostaje wykazać, że istnieje ponumerowanie spełniające warunki zadania wykorzystujące co najwyżej 11 zer.

Rozważmy szachownicę 11×11 pokolorowaną na czarno-biało. Wybierzmy jedną z głównych przekątnych tej planszy i wpiszmy w nią same zera. Nad tą przekątną w pola białe wpiszmy liczbę 1, zaś w czarne -1, pod tą przekątną na odwrót. Łatwo sprawdzić, że tak ponumerowana tablica spełnia warunki zadania.

0	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
−1	0	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1
1	−1	0	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1
−1	1	−1	0	1	−1	1	−1	1	−1	1
1	−1	1	−1	0	1	−1	1	−1	1	−1
−1	1	−1	1	−1	0	1	−1	1	−1	1
1	−1	1	−1	1	−1	0	1	−1	1	−1
−1	1	−1	1	−1	1	−1	0	1	−1	1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	0	1	−1
−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	0	1
1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	1	−1	0

Zadanie 5

6. Przypuśćmy nie wprost, że takie ponumerowanie istnieje. Niech suma liczb wychodzących z jednego wierzchołka wynosi w. Przyjmijmy też, że liczba K jest sumą liczb z wszystkich krawędzi.

Każda krawędź zawiera dokładnie dwa wierzchołki sześcianu. Stąd liczba zapisana na jednej krawędzi wejdzie w skład sumy liczb z wierzchołków dwukrotnie, czyli ta suma wyniesie $2K$. Otrzymujemy więc, że

$$K = \frac{8w}{2} = 4w.$$

Krawędzie są ponumerowane liczbami $1, 2, \ldots, 12$, więc

$$K = 1 + 2 + \ldots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78.$$

Zatem $78 = 4w$, co zajść nie może, ponieważ w jest liczbą całkowitą. Uzyskana sprzeczność z założeniem nie wprost dowodzi, że szukane ponumerowanie nie istnieje.

7. Oznaczmy sumy liczb w kolumnach przez 2^{k_1}, 2^{k_2}, 2^{k_3}, 2^{k_4}, zaś w wierszach przez 2^{w_1}, 2^{w_2}, 2^{w_3}, 2^{w_4}, gdzie k_1, k_2, k_3, k_4, w_1, w_2, w_3, w_4 są parami różnymi nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Bez straty ogólności załóżmy, że k_1 jest najmniejszą spośród wszystkich tych liczb. Obliczając na dwa sposoby sumę wszystkich liczb wpisanych w pola tablicy, uzyskujemy równość

$$2^{k_1}+2^{k_2}+2^{k_3}+2^{k_4}=2^{w_1}+2^{w_2}+2^{w_3}+2^{w_4}.$$

Dzieląc powyższą równość stronami przez 2^{k_1}, otrzymujemy

$$1+2^{k_2-k_1}+2^{k_3-k_1}+2^{k_4-k_1}=$$
$$=2^{w_1-k_1}+2^{w_2-k_1}+2^{w_3-k_1}+2^{w_4-k_1}.$$

Lewa strona powyższej zależności jest liczbą nieparzystą, a prawa – liczbą parzystą. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że nie jest możliwe wpisanie liczb w pola tablicy zgodnie z warunkami zadania.

8. Przypuśćmy, że takie wpisanie liczb jest możliwe. Obliczmy sumę tych osiemnastu liczb. Z jednej strony jest to dwukrotność sumy liczb w tablicy, czyli liczba parzysta.

Z drugiej strony jest to suma liczb k, $k+1$, $\ldots$, $k+17$ dla pewnego naturalnego k, która wynosi

$$18k+\frac{17\cdot 18}{2}=18k+153,$$

co jest liczbą nieparzystą dla dowolnej liczby całkowitej k. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukane wpisanie nie jest możliwe.

9. Przypuśćmy, że taki podział jest możliwy. Zauważmy, że suma wyrazów trójelementowego ciągu arytmetycznego jest zawsze podzielna przez 3, gdyż taki ciąg arytmetyczny jest postaci

$$(a,\ a+b,\ a+2b),$$

więc suma jego elementów to $3(a+b)$.

Ponieważ zbiór $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 3n-2,\ 3n-1,\ 3n+1\}$ podzieliliśmy na rozłączne podzbiory o sumie elementów podzielnej przez 3, to suma liczb w całym tym zbiorze też musi być podzielna przez 3.

Zauważmy jednak, że

$$1+2+\ldots+3n-2+3n-1+3n+1=$$
$$=\frac{(3n-1)\cdot 3n}{2}+3n+1=3\cdot\left(\frac{(3n-1)\cdot n}{2}+n\right)+1,$$

co nie jest liczbą podzielną przez 3. Uzyskaliśmy sprzeczność, co oznacza, że szukany podział nie istnieje.

Uwaga
Należy uzasadnić, że liczba $\frac{(3n-1)\cdot n}{2}$ jest całkowita. Wynika to stąd, że niezależnie od parzystości n, jedna z liczb n, $3n-1$ jest parzysta.

10. Przypuśćmy nie wprost, że liczby na krawędziach są parami różne. Wszystkie te liczby są nie mniejsze od $1+2=3$ i nie większe od $7+8=15$, a zatem należą do przedziału $[3,15]$. Krawędzi jest dwanaście, czyli o jeden mniej niż liczb całkowitych w tym przedziale, więc dokładnie jedna liczba całkowita z tego przedziału nie jest wpisana na żadnej krawędzi. Oznaczmy ją przez k.

Zauważmy, że skoro każdy wierzchołek sześcianu należy do trzech krawędzi, to suma S liczb na wszystkich krawędziach jest trzykrotnością sumy liczb w wierzchołkach, czyli

$$S=3\cdot(1+2+3+4+5+6+7+8)=108.$$

Z drugiej strony $S+k$ jest sumą wszystkich liczb całkowitych z przedziału $[3,15]$, więc

$$108+k=3+4+\cdots+14+15=117,$$

czyli $k=9$. Stąd liczby 3, 4, 5 i 6 są napisane na pewnych krawędziach.

Rozważmy krawędź, na której napisana jest liczba 3. Na jej końcach muszą być napisane liczby 1 i 2. Rozważmy krawędź, na której napisana jest liczba 4. Na jej końcach muszą być napisane liczby 1 i 3. Z poprzednich czterech zdań możemy łatwo wywnioskować, że liczby 2 i 3 nie należą do jednej krawędzi. Rozważmy w końcu krawędź, na której napisana jest liczba 5. Na jej końcach muszą być napisane liczby 2 i 3 lub 1 i 4.

Wiemy już jednak, że liczby 2 i 3 nie są połączone krawędzią, zatem to liczby 1 i 4 są napisane na tej krawędzi. Stąd płynie wniosek, że wierzchołek z napisaną liczbą 1 sąsiaduje z wierzchołkami zawierającymi liczby 2, 3 i 4. Z tego łatwo wynika, że ani liczby 1 i 5, ani 2 i 4 nie należą do jednej krawędzi, zatem nie istnieje krawędź z napisaną liczbą 6. Powyższa sprzeczność kończy rozwiązanie zadania.

14 Nierówność trójkąta

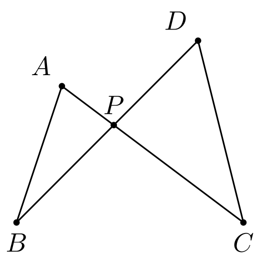
1. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Zapiszmy nierówność trójkąta dla trójkątów APB oraz CPD:

$$AP + BP > AB \qquad \text{oraz} \qquad CP + DP > CD,$$

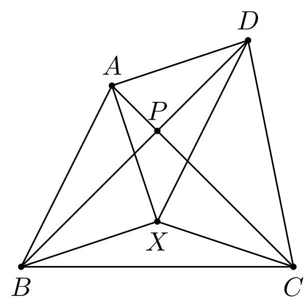
Nierówności te są ostre, gdyż punkt P nie należy do żadnego z odcinków AB i CD. Dodając nierówności wyżej, otrzymujemy

$$AC + BD = AP + BP + CP + DP > AB + CD,$$

czego należało dowieść.



Zadanie 1



Zadanie 2

2. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD. Rozważmy dowolny punkt X na płaszczyźnie. Zapisując nierówność trójkąta dla trójkątów AXC oraz BXD, otrzymujemy

$$AX + CX \geqslant AC = AP + CP,$$

$$BX + DX \geqslant BD = BP + DP,$$

które to nierówności po dodaniu dają następującą nierówność

$$AX + BX + CX + DX \geqslant AP + BP + CP + DP.$$

Równość zachodzi w nierówności wyżej wtedy i tylko wtedy, gdy X należy do odcinków AC i BD, czyli gdy $X = P$. W rezultacie punkt P minimalizuje sumę odległości od wierzchołków czworokąta.

3. Z treści zadania wiemy, że długości boków trójkąta są równe a^n, a^{n+1}, a^{n+2}, gdzie n to pewna liczba całkowita. Stąd zapisując nierówność trójkąta, otrzymujemy

$$a^n + a^{n+1} > a^{n+2}, \quad \text{czyli} \quad 1 + a > a^2.$$

Zauważmy jednak, że dla $a \geqslant 2$ zachodzi $a^2 \geqslant 2a > a + 1$. Wobec tego $a = 1$, więc wszystkie boki danego trójkąta są równe 1.

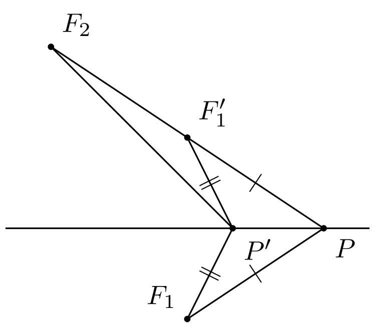
4. Niech F_1' będzie odbiciem punktu F_1 względem prostej l. Niech P będzie punktem przecięcia prostej $F_1'F_2$ z prostą l, natomiast niech P' będzie dowolnym punktem na prostej l. Z założeń wynika, że P leży na przedłużeniu odcinka $F_1'F_2$. Prosta l jest symetralną odcinka F_1F_1', czyli zachodzą równości:

$$F_1P' = F_1'P' \quad \text{oraz} \quad F_1P = F_1'P.$$

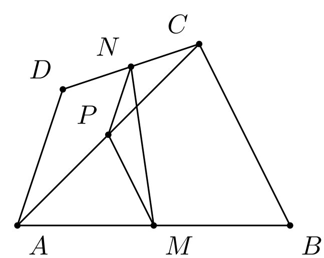
Wówczas zapisując nierówność trójkąta dla $F_1'P'F_2$, otrzymujemy

$$\left|F_1P' - F_2P'\right| = \left|F_1'P' - F_2P'\right| \leqslant F_1'F_2 = \left|F_1'P - F_2P\right| = |F_1P - F_2P|,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $P' = P$. Stąd punkt P jest szukanym punktem na prostej l.



Zadanie 4



Zadanie 5

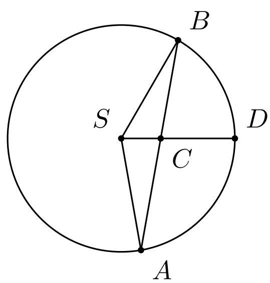
5. Niech P będzie środkiem odcinka AC. Skoro punkt M jest środkiem AB, to na mocy twierdzenia o linii środkowej dla trójkąta ABC mamy $PM = \frac{1}{2}BC$. Analogicznie otrzymujemy $PN = \frac{1}{2}DA$.

Zapisując nierówność trójkąta dla MPN, otrzymujemy

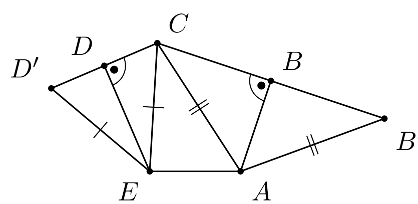
$$MN \leqslant MP + NP = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}DA,$$

co jest równoważne nierówności z treści zadania.

6. Niech promień danego okręgu będzie równy r. Wówczas
$$AS = BS = DS = r.$$
Z nierówności trójkąta, zastosowanej do trójkątów ACS oraz BCS otrzymujemy:
$$AC + SC > AS \quad \text{oraz} \quad BC + SC > BS.$$
Dodając te nierówności stronami, uzyskujemy kolejno
$$AC + BC + 2SC > AS + BS = 2r,$$
$$AB + 2SC > 2r,$$
$$AB > 2r - 2SC = 2(SD - SC) = 2CD,$$
co było do udowodnienia.



Zadanie 6



Zadanie 7

7. Niech B' i D' będą odbiciami punktu C odpowiednio względem punktów B i D. Wówczas punkty B i D są środkami odpowiednio odcinków $B'C$ oraz $D'C$. Na mocy twierdzenia o linii środkowej dla trójkąta $B'CD'$ uzyskujemy, że $B'D' = 2BD$.

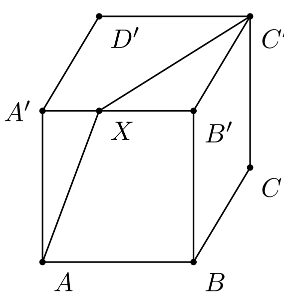
Zauważamy, że prosta AB jest jednocześnie wysokością i środkową w trójkącie $AB'C$, czyli jest on równoramienny. Analogicznie dowodzimy, że trójkąt CED' jest równoramienny. Mamy więc, że
$$AB' = AC \quad \text{i} \quad ED' = EC.$$
Zapiszmy uogólnioną nierówność trójkąta dla łamanej zamkniętej $B'AED'$:
$$2 \cdot BD = B'D' \leqslant B'A + AE + ED' = CA + AE + EC.$$
Dowód jest zatem zakończony.

8. Rozważmy sześcian $ABCDA'B'C'D'$, przy czym $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$ to dwie przeciwległe ściany oraz AA', BB', CC', DD' to krawędzie sześcianu. Szukamy najkrótszej ścieżki pomiędzy wierzchołkami A i C' zawartej w powierzchni sześcianu.

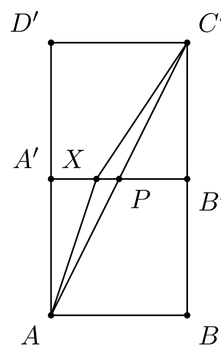
Zauważmy, że każda ścieżka pomiędzy wierzchołkami A i C' zawarta w powierzchni sześcianu musi przeciąć w pewnym punkcie łamaną zamkniętą $BCDD'A'B'$. Oznaczmy ten punkt jako X.

W związku z tym, że odcinki AX i $C'X$ zawierają się w powierzchni sześcianu, to najkrótsza ścieżka pomiędzy A i C' przechodząca przez X złożona jest z dwóch odcinków AX i $C'X$ (prosty wniosek z nierówności trójkąta).

Pozostaje znaleźć taki punkt X, że wartość wyrażenia $AX + C'X$ jest możliwie najmniejsza. Z symetrii możemy założyć, że X leży na odcinku $A'B'$.



Zadanie 8 (rys. 1)



Zadanie 8 (rys. 2)

Rozważmy teraz siatkę naszego sześcianu, taką żeby krawędź $A'B'$ pozostała nierozcięta.

Wówczas niech prosta AC' przecina odcinek $A'B'$ w punkcie P. Łatwo możemy sprawdzić, że P to środek $A'B'$. Stosując nierówność trójkąta dla AXC', otrzymujemy

$$AX + C'X \geqslant AC' = AP + C'P,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $X = P$. Stąd szukaną ścieżką jest łamana otwarta APC'.

9. Niech D będzie tym środkiem tego łuku $\widehat{BC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC, który nie zawiera punktu A. Wówczas zachodzi równość $BD = CD$. Zauważmy, że skoro $\sphericalangle BAC = 120°$ oraz z faktu, że czworokąt $ABDC$ jest wpisany w okrąg (co pociąga za sobą warunek $\sphericalangle BAC + \sphericalangle CDB = 180°$), uzyskujemy

$$\sphericalangle CDB = 60°.$$

Skoro $BD = CD$, to trójkąt BCD jest równoboczny, natomiast MD to jego wysokość. Stąd otrzymujemy

$$MD = \frac{\sqrt{3}}{2}BC.$$

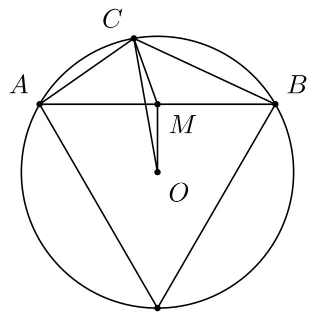
Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na czworokącie $ABCD$. Wówczas, skoro trójkąt BCD jest równoboczny, to

$$OD = \frac{2}{3}MD.$$

Zapisując nierówność trójkąta dla AOM, otrzymujemy

$$\begin{aligned} AM \geqslant OA - OM &= OD - (MD - OD) = \\ &= 2 \cdot OD - MD = \\ &= \frac{4}{3}MD - MD = \\ &= \frac{1}{3}MD \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}BC, \end{aligned}$$

czego należało dowieść.



Zadanie 9

10. Rozważmy dowolną średnicę PP' koła danego w zadaniu, dla której istnieje takie i, że punkt A_i nie należy do PP'. Wówczas zapisując nierówność trójkąta PA_iP' dla $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$, otrzymujemy

$$PA_i + P'A_i \geqslant PP' = 2.$$

Po dodaniu stron analogicznych nierówności sformułowanych dla wszystkich i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, 100\}$, otrzymamy

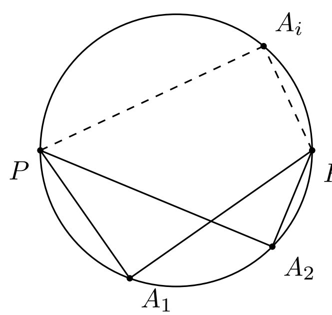
$$\Big(PA_1 + P'A_1\Big) + \Big(PA_2 + P'A_2\Big) + \\ + \cdots + \Big(PA_{100} + P'A_{100}\Big) > 200.$$

Uzyskana nierówność jest ostra, ponieważ z założenia istnieje takie i, że punkt A_i nie leży na PP'.

Zauważmy dalej, że gdyby żaden z punktów P, P' nie spełniałby warunku danego w zadaniu, to mielibyśmy

$$(PA_1 + \cdots + PA_{100}) + \Big(P'A_1 + \cdots + P'A_{100}\Big) \leqslant 200.$$

Otrzymane nierówności są ze sobą sprzeczne. Zatem co najmniej jeden z punktów P, P' spełnia warunek z zadania.



Zadanie 10

15 Nierówności

1. Zauważmy, że liczby x i $\frac{1}{x}$ są tego samego znaku, czyli

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|}.$$

Wystarczy więc wykazać, że

$$|x| + \frac{1}{|x|} \geqslant 2.$$

Przemnażając tę równość przez $|x|$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} |x|^2+1 &\geqslant 2|x|, \\ |x|^2-2|x|+1 &\geqslant 0, \\ (|x|-1)^2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Skoro kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, to ostatnia nierówność jest zawsze prawdziwa. Skoro wszystkie przekształcenia były równoważne, to pierwsza równość także musi być prawdziwa.

2. Pomnóżmy tę nierówność stronami przez $ab(a+b)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}+\frac{1}{b} &\geqslant \frac{4}{a+b}, \\ b(a+b)+a(a+b) &\geqslant 4ab, \\ a^2+b^2 &\geqslant 2ab. \end{aligned}$$

Prawdziwość ostatniej nierówności została wykazana w skrypcie jako Twierdzenie, więc teza została uzasadniona.

3. Skoro $a,b,c \geqslant \sqrt{3}$, to $bc \geqslant 3$, więc $abc \geqslant 3a$. Analogicznie dowodzimy, że $abc \geqslant 3b$ i $abc \geqslant 3c$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy

$$3abc \geqslant 3a+3b+3c.$$

Z powyższej zależności wprost wynika teza.

4. Oznaczmy $x = a - c$ i $y = c - b$. Rozważana nierówność przyjmuje wtedy postać

$$2x^2 + 2y^2 \geqslant (x+y)^2.$$

Po rozwinięciu prawej strony i zredukowaniu wyrazów podobnych dostajemy

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &\geqslant x^2 + 2xy + y^2, \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geqslant 0, \\ (x-y)^2 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

co kończy dowód.

5. Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną mamy, że

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, \qquad b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, \qquad c + a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Mnożąc te nierówności stronami, otrzymujemy, że

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc.$$

6. Wykażemy, że podana własność zachodzi jedynie dla $n = 3$.

Rozpatrzmy przypadek, gdy $n = 3$. Jeśli $x \geqslant y$, to

$$x^4 + y^4 > x^4 \geqslant xy^3.$$

Gdy zaś $y \geqslant x$, to

$$x^4 + y^4 > y^4 \geqslant xy^3,$$

czyli w tym przypadku dana nierówność istotnie jest prawdziwa.

Dla $n = 1, 2$ weźmy $x = y = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy wówczas

$$x^4 + y^4 = 2 \cdot \frac{1}{3^4} < \frac{1}{3^3} \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^n} = xy^n.$$

Gdy zaś $n > 3$, to biorąc $x = y = 3$, otrzymujemy, że

$$x^4 + y^4 = 2 \cdot 3^4 < 3^5 = xy^4 \leqslant xy^n.$$

7. W przypadku bardziej złożonych nierówności, analizowanie rozważanie szczególnych przypadków pozwala nam niekiedy poczynić kluczowe obserwacje.

Zobaczmy jaką formę przyjmie wyjściowa nierówność, gdy $b=c$. Otrzymujemy

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2b^2}{2b}+\frac{b^2+a^2}{b+a}\geqslant a+2b,$$
$$2\cdot\frac{a^2+b^2}{a+b}+b\geqslant a+2b,$$
$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2}.$$

Postaramy się wykazać powyższą nierówność. Przekształcając równoważne, otrzymujemy

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b}{2},$$
$$2a^2+2b^2\geqslant(a+b)^2,$$
$$2a^2+2b^2\geqslant a^2+2ab+b^2,$$
$$a^2-2ab+b^2\geqslant 0,$$
$$(a-b)^2\geqslant 0,$$

co jest zawsze prawdą.

Teraz zastosujemy wykazaną nierówność w ogólnym przypadku. Mamy

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geqslant\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}=a+b+c,$$

czego należało dowieść.

8. Po wymnożeniu nawiasów, nierówność przyjmuje postać

$$xy^2+yx^2+x+y-4xy<1-2xy+x^2y^2.$$

Przekształćmy ją równoważnie:

$$xy^2+yx^2+x+y<x^2y^2+2xy+1,$$
$$(xy+1)(x+y)<(xy+1)^2,$$
$$x+y<xy+1,$$
$$0<(x-1)(y-1).$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $0<x,y<1$.

9. Skoro $a+b+c+d=1$, to nierówność z tezy jest równoważna nierówności

$$a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \geqslant 1 = (a+b+c+d)^2 =$$
$$= a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2ac+2ad+2bd+2cd,$$

$$2b^2+4c^2+6d^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac+2ad+2bd+2cd.$$

Zauważmy, że po lewej stronie nierówności znajdują się kwadraty liczb rzeczywistych, a po prawej wyrażenia typu $2ab$. Naprowadza nas to na następujące szacowanie prawej strony nierówności

$$2ab+2bc+2ac+2ad+2bd+2cd \leqslant (a^2+b^2)+(b^2+c^2)+$$
$$+(a^2+c^2)+(a^2+d^2)+(b^2+d^2)+(c^2+d^2)=$$
$$=3a^2+3b^2+3c^2+3d^2.$$

Korzystając z założenia, że $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, otrzymujemy, że

$$3a^2+3b^2+3c^2+3d^2 \leqslant 2b^2+4c^2+6d^2.$$

Łącząc powyższe nierówności, uzyskujemy tezę.

10. Zauważmy, że

$$abc = ab+bc+ca = \frac{abc}{c}+\frac{abc}{a}+\frac{abc}{b} =$$
$$= \frac{ab+bc+ca}{c}+\frac{ab+bc+ca}{a}+\frac{ab+bc+ca}{b} >$$
$$> \frac{bc+ca}{c}+\frac{ab+ca}{a}+\frac{ab+bc}{b} = 2(a+b+c),$$

co było do udowodnienia.

11. Wykażemy, że zachodzi nierówność $(a+b)^2 \geqslant 4ab$. Jest ona równoważna nierównościom

$$a^2+2ab+b^2 \geqslant 4ab,$$
$$a^2-2ab+b^2 \geqslant 0,$$
$$(a-b)^2 \geqslant 0,$$

co jest oczywiście prawdą. Z założenia mamy zatem

$$(a+b)^2 \geqslant 4ab > 4(a+b), \qquad \text{czyli} \qquad a+b>4,$$

gdyż $a+b>0$. Dowód jest zakończony.

12. Na mocy nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną otrzymujemy, że

$$n^n + m^m \geqslant 2\sqrt{n^n m^m}.$$

Skoro $mn \geqslant 1$, to także

$$\sqrt{(mn)^{\frac{m+n}{2}}} \geqslant \sqrt{(mn)^{\sqrt{mn}}}.$$

Łącząc udowodnione nierówności, dochodzimy do wniosku, że wystarczy udowodnić następującą nierówność:

$$\sqrt{n^n m^m} \geqslant \sqrt{(mn)^{\frac{m+n}{2}}}.$$

Podnieśmy ją stronami do czwartej potęgi, a następnie podzielmy przez $n^n m^n$:

$$n^{2n} m^{2m} \geqslant m^{m+n} n^{m+n},$$
$$n^n m^m \geqslant m^n n^m,$$

co dalej jest równoważne temu, że

$$n^{n-m} m^{m-n} \geqslant 1,$$
$$\left(\frac{n}{m}\right)^{n-m} \geqslant 1.$$

Jeśli $n \geqslant m$, to podnosimy liczbę nie mniejszą niż 1 do nieujemnej potęgi, zatem otrzymujemy liczbę nie mniejszą niż 1. Jeśli $m \geqslant n$, to podnosimy liczbę nie większą niż 1 do potęgi niedodatniej, zatem znowu otrzymujemy liczbę nie mniejszą niż 1. W obu przypadkach otrzymujemy tezę.

[r]

16 Zasada minimum i maksimum

1. *Odpowiedź.* Nie jest to możliwe.

Niech a będzie największą z wpisanych liczb. Jeśli jest takich kilka, to wybieramy dowolną z nich. Sąsiadujące z nią liczby oznaczmy przez b i c tak, aby zachodziło $b \geqslant c$. Wówczas $a = b - c$, więc skoro $c > 0$, to $a < b$. Ze sposobu wyboru liczby a wiemy, że $a \geqslant b$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje postulowane przyporządkowanie liczb wierzchołkom tego wielokąta.

2. *Odpowiedź.* Nie, taki wielościan nie istnieje.

Rozważmy najkrótszą krawędź wielościanu i oznaczmy ją przez AB. Z założeń zadania wynika, że istnieje taki wierzchołek C, że ABC jest ścianą wielościanu i kąt $\sphericalangle ACB$ jest rozwarty. W trójkącie rozwartokątnym naprzeciwko kąta rozwartego jest najdłuższy bok, więc $AB > AC$. Nie jest to jednak możliwe, gdyż z założenia minimalności AB wynika $AB \leqslant AC$. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że szukany wielościan nie istnieje.

3. Niech a będzie najmniejszą z liczb wpisanych w pola tablicy. Rozważmy jedno z pól, w które jest wpisana liczba a. Liczby wpisane w sąsiadujące pola są nie mniejsze od a, a ich średnia arytmetyczna to a, więc każda z nich jest równa a. Zatem jeśli w pole jest wpisana liczba a, to we wszystkich sąsiadujących polach jest również a.

Zauważmy, że do każdego pola planszy można dojść od pola zawierającego a, przechodząc w każdym kroku przez pola sąsiadujące. Skoro w polu startowym jest a i sąsiaduje ono z drugim polem, przez które przechodzimy, to w drugim polu również musi być a. W ten sam sposób w trzecim i każdym następnym polu jest wpisane a. Zatem w ostatnim polu na naszej ścieżce również jest a. To dowodzi, że wszystkie liczby wpisane w pola są równe

4. Załóżmy nie wprost, że żaden rycerz nie wygrał ze wszystkimi innymi. Niech A będzie uczestnikiem turnieju, który wygrał największą liczbę pojedynków. Zgodnie z założeniem istnieje rycerz, z którym A przegrał – nazwijmy go B.

Niech C będzie pewnym rycerzem, którego pokonał A. Zauważmy, że jeśli B przegrałby z C, to stanowiliby trójkę, która według założenia zadania nie istnieje. Oznacza to, że B wygrał z C.

Okazuje się w ten sposób, że B pokonał każdego rycerza, z którym wygrał A oraz samego A — czyli o jedną osobę więcej. Ponieważ to A miał wygrać najwięcej pojedynków, otrzymujemy sprzeczność. Istnieje więc rycerz, która wygrał ze wszystkimi innymi.

5. Skoro użyto każdego z trzech kolorów, to istnieje przynajmniej jeden trójkąt o wierzchołkach różnych kolorów. Spośród wszystkich takich trójkątów wybierzmy ten o najmniejszym polu (jeśli trójkątów o najmniejszym polu jest więcej niż jeden, wybieramy dowolny z nich). Nazwijmy ten trójkąt ABC. Wykażemy, że trójkąt ABC spełnia warunki zadania.

Przypuśćmy, że do wnętrza trójkąta ABC należy pewien zaznaczony punkt X. Skoro ten trójkąt ma po jednym wierzchołku każdego koloru, to w szczególności ma wierzchołek tego samego koloru co punkt X. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkty X i A mają ten sam kolor. To oznacza, że każde dwa wierzchołki trójkąta BCX mają różne kolory. Jednak pole tego trójkąta jest mniejsze od pola trójkąta ABC. Uzyskana sprzeczność dowodzi, że do wnętrza trójkąta ABC nie należy żaden zaznaczony punkt.

6. *Odpowiedź.* Napisano liczby 0, x lub 0, y, $-y$ dla $x, y \in \mathbb{R}$.

Wykażmy, że na tablicy zapisano co najwyżej jedną liczbę dodatnią. Przypuśćmy nie wprost, że na tablicy są co najmniej dwie liczby większe od zera. Niech a będzie największą, a b inną zapisaną liczbą dodatnią. Wówczas na tablicy znajduje się również liczba $a+b > a$, co przeczy maksymalności a. Stąd wnioskujemy, że na tablicy zapisano co najwyżej jedną liczbę dodatnią. Analogicznie stwierdzamy, że na tablicy zapisano co najwyżej jedną liczbę ujemną.

Załóżmy, że na tablicy zapisano jedną liczbę dodatnią i jedną liczbę ujemną. Oznaczmy je jako $x > 0 > y$. Wówczas liczba $x+y$ również jest zapisana na tablicy. Skoro x, y są różne od zera, to $x+y$ nie jest równe żadnej z nich. Pokazaliśmy, że na tablicy zapisano co najwyżej jedną liczbę dodatnią i co najwyżej jedną liczbę ujemną, więc $x+y$ musi być równe 0. Stąd otrzymujemy, że $x=-y$, czyli na tablicy zapisano trójkę $(-y,y,0)$.

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy na tablicy jest jedna liczba różna od zera – oznaczmy ją jako x. Skoro na tablicy zapisano więcej niż jedną liczbę, a x jest jedyną zapisaną liczbą niezerową, to na tablicy musi znajdować się również 0.

Zatem na tablicy mogła być zapisana para $(0,x)$ lub trójka $(-y,y,0)$, gdzie $x,y \neq 0$. Obie możliwości spełniają warunki zadania.

7. Nazwijmy *cyklem* taką grupę uczestników $A_1, A_2, \ldots, A_k$, że A_1 wygrał z A_2, A_2 z A_3, ... i A_k z A_1. Przypuśćmy nie wprost, że nie istnieje cykl długości 3. Rozważmy najmniejszy cykl istniejący w tej grupie. Z treści zadania wiemy, że jakiś istnieje i ma więcej niż troje uczestników. Niech A, B i C będą pewnymi trzema kolejnymi uczestnikami w znalezionym przez nas najmniejszym cyklu – oznacza to, że A wygrał z B, a B z C. Jeśli A wygrał z C, to możemy wykluczyć B z tego cyklu i znaleźć w ten sposób mniejszy – co byłoby sprzeczne z założeniem, że znaleziony cykl jest najmniejszy. Tak więc A przegrał z C, czyli A, B i C są szukaną trójką zawodników.

8. Załóżmy, że zbiór rozwiązań (x,y,z) tego równania w liczbach całkowitych dodatnich jest niepusty. Wobec tego istnieje rozwiązanie (x_0,y_0,z_0) o najmniejszej sumie. Wówczas

$$x_0^3 + 2y_0^3 + 4z_0^3 = 8x_0y_0z_0.$$

Zauważmy, że liczba x_0 musi być parzysta, zatem możemy zapisać $x_0 = 2x_1$ dla pewnego całkowitego dodatniego x_1. Wtedy

$$8x_1^3 + 2y_0^3 + 4z_0^3 = 16x_1y_0z_0.$$

Po podzieleniu przez dwa otrzymujemy

$$y_0^3 + 2z_0^3 + 4x_1^3 = 8y_0z_0x_1,$$

czyli trójka (y_0, z_0, x_1) również jest rozwiązaniem tego równania.

Jednak

$$y_0 + z_0 + x_1 = \frac{1}{2}x_0 + y_0 + z_0 < x_0 + y_0 + z_0.$$

Skonstruowaliśmy zatem rozwiązanie o mniejszej sumie. Powyższa sprzeczność dowodzi, że równanie to nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich.

Uwaga
W powyższym rozwiązaniu udowodniliśmy, że równanie nie ma rozwiązań całkowitych dodatnich, poprzez konstruowanie coraz to mniejszych rozwiązań. Ta metoda jest znana pod nazwą *nieskończonego schodzenia.*

9. Rozważmy taki trójkąt ABC o czerwonych wierzchołkach, którego pole P jest możliwie największe. Niech k_A to będzie prosta przechodząca przez punkt A, która jest równoległa do boku BC.

Przypuśćmy, że pewien czerwony punkt X leży po przeciwnej stronie prostej k_A co punkty B i C. Wówczas wysokość opuszczona z punktu X na prostą BC jest większa od wysokości opuszczonej z punktu A. Skoro trójkąty ABC oraz XBC mają tę samą podstawę, to

$$[XBC] > [ABC] = P,$$

co przeczy maksymalności pola trójkąta ABC.

Zdefiniujmy analogicznie proste k_B i k_C. Pokazaliśmy właśnie, że każdy czerwony punkt leży po tej samej stronie prostej k_a co B i C. Podobnie można pokazać, że punkty te leżą po tej samej stronie prostej k_b co punkty A i C, i tej samej stronie k_c co A i B.

Łatwo zauważyć, że w takim razie czerwone punkty leżą wewnątrz trójkąta wyznaczonego przez proste k_a, k_b i k_c albo na jego brzegu. Odcinki AB, BC i CA dzielą ten trójkąt na cztery trójkąty przystające, a więc pole całego trójkąta wynosi $4P \leqslant 4$. Uzasadniliśmy zatem, że ten trójkąt spełnia warunki zadania.

10. Rozpatrzmy dwie planety z najmniejszą odległością między sobą. Następnie rozpatrzmy dwie planety z pozostałych $2n-1$ z najmniejszą odległością między sobą. Postępując tak dalej, otrzymamy n par planet oraz jedną samotną planetę. Wykażemy, że żaden astronom nie obserwuje ostatniej planety.

Przypuśćmy nie wprost, że jest ona obserwowana z planety P. Wtedy ostatnia planeta jest bliżej P niż jakakolwiek inna planeta, w szczególności bliżej niż aktualna para P. Jednak wtedy w momencie wybierania pary dla P wybraliśmy najbliższą do niej planetę bez pary i nie była nią ostatnia planeta. Z powyższej sprzeczności wynika, że ostatnia planeta jest nieobserwowana.

17 Liczby pierwsze i złożone

1. Każdą liczbę całkowitą można przedstawić w jednej z poniższych postaci:

$$6k,\ 6k+1,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4,\ 6k+5.$$

Zauważmy, że liczba pierwsza większa od 3 jest niepodzielna przez 2 i przez 3. Natomiast wszystkie liczby postaci $6k$, $6k+2$ i $6k+4$ są podzielne przez 2, zaś liczby postaci $6k+3$ są podzielne przez 3. Stąd możemy wywnioskować, że wszystkie liczby pierwsze większe od 3 można przedstawić w postaci $6k+1$ lub $6k+5$.

2. Weźmy dowolną liczbę całkowitą $n \geqslant 6$. Jeśli n jest liczbą parzystą, to szukanym przedstawieniem może być

$$n = 2 + (n-2).$$

Liczba $n-2$ jest liczbą parzystą oraz większą od 2, więc jest złożona, a 2 jest liczbą pierwszą.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, to rozpatrzmy przedstawienie

$$n = 3 + (n-3).$$

Wówczas $n-3$ jest parzystą liczbą większą od 2, a 3 jest liczbą pierwszą.

W rezultacie, w obu przypadkach szukane przedstawienie istnieje.

3. Zauważmy, że liczba $p+q$ jest parzysta, jako suma liczb nieparzystych. Liczba $\frac{p+q}{2}$ jest całkowita oraz nie jest liczbą pierwszą, ponieważ leży pomiędzy dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi. W jej rozkładzie na czynniki pierwsze występują więc przynajmniej dwie liczby pierwsze. Stąd w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby

$$p+q = 2 \cdot \frac{p+q}{2}$$

występują przynajmniej trzy liczby pierwsze.

4. *Odpowiedź.* Szukanymi liczbami całkowitymi są wszystkie liczby złożone różne od 4.

Jeśli n jest liczbą pierwszą, to żadna z liczb $1, 2, \ldots, n-1$ nie jest podzielna przez n. Skoro n jest liczbą pierwszą i żaden z czynników $(n-1)!$ nie jest przez nią podzielny, to w szczególności cały iloczyn nie jest podzielny przez n.

Jeśli $n = p^2$, dla pewnej liczby pierwszej $p \geqslant 3$, to liczby p i $2p$ są mniejsze od n. Stąd wśród liczb $1, 2, \ldots, n-1$ są liczby p i $2p$. Oznacza to, że w iloczynie

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)$$

są co najmniej dwa czynniki podzielne przez p. Cały iloczyn jest więc podzielny przez $p^2 = n$.

Łatwo sprawdzić, że liczba $n = 2^2 = 4$ nie spełnia tezy zadania, ponieważ liczba $(4-1)! = 6$ nie jest podzielna przez 4.

Pozostaje do sprawdzenia przypadek, gdy n jest liczbą złożoną różną od kwadratu liczby pierwszej. Niech a będzie najmniejszym dzielnikiem pierwszym n. Wówczas liczba $\frac{n}{a}$ również jest dzielnikiem n. Ponadto, mamy

$$\frac{n}{a} \geqslant a.$$

Gdyby w powyższej nierówności zachodziła równość, wtedy liczbę n można by było przedstawić w postaci

$$n = \frac{n}{a} \cdot a = a^2,$$

gdzie a jest liczbą pierwszą. Przeczy to jednak założeniu, że n nie jest kwadratem. Mamy więc, że

$$n - 1 \geqslant \frac{n}{a} > a > 1.$$

Otrzymujemy zatem

$$a \cdot \frac{n}{a} \,\Big|\, (n-1)!,$$

czyli $n \,\Big|\, (n-1)!$.

Ostatecznie wszystkimi liczbami n, spełniającymi warunek z zadania, są liczby złożone różne od 4.

5. Załóżmy, że istnieją takie parami różne liczby pierwsze p_1, p_2, p_3, ..., p_k, że

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\ldots+\frac{1}{p_k}=n.$$

Wówczas

$$p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k+p_1\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k+\ldots+p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_{k-1}=$$
$$=n\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k.$$

Zauważmy, że wszystkie składniki po obu stronach równości, poza liczbą $p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$, są podzielne przez p_1. Stąd liczba $p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_k$ również dzieli się przez p_1, co jest sprzeczne z założeniami.

6. Rozpatrzmy rozkład liczby 50! na czynniki pierwsze:

$$50!=2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}\cdot\ldots.$$

Zauważmy, że jeśli liczba 50! będzie miała na swoim końcu k zer, to

$$10^k=2^k\cdot 5^k \Big| 50!.$$

Wystarczy więc, aby $\alpha,\gamma\geqslant k$. Największym k, dla którego powyższa podzielność będzie zachodzić jest zatem $min(\alpha,\gamma)$.

Obliczmy jaki jest wykładnik 5 w rozkładzie 50!. Zauważmy, że w iloczynie

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 50,$$

występuje 8 liczb podzielnych przez 5, ale niepodzielnych przez 25, oraz 2 liczby podzielne przez 25. Stąd

$$\gamma=8\cdot 1+2\cdot 2=12.$$

Łatwo zauważyć, że iloczyn 50! ma 25 parzystych czynników, więc na pewno $\alpha\geqslant 25$.

Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy, że szukana liczba zer to $min(\alpha,\gamma)=\gamma=12$.

7. Załóżmy, że istnieją takie parami różne liczby pierwsze p, q i r, dla których liczba $\frac{(p+q)(q+r)(r+p)}{pqr}$ jest całkowita.

Gdyby $p \Big| p+q$, to wówczas $p \Big| q$, co rzecz jasna przeczy temu, że p i q są różnymi liczbami pierwszymi. Stąd liczba p nie dzieli liczby $p+q$. Analogicznie dowodzimy, że p nie dzieli liczby $p+r$. Wiemy, że zachodzi podzielność

$$p \Big| (p+q)(q+r)(r+p).$$

Skoro p dzieli jeden z czynników, to $p \Big| q+r$, skąd

$$p \Big| p+q+r.$$

Analogicznie dowodzimy, że

$$q \Big| p+q+r \quad \text{oraz} \quad r \Big| p+q+r.$$

Skoro liczby p, q i r są różnymi liczbami pierwszymi, to na mocy powyższych podzielności możemy stwierdzić, że

$$pqr \Big| p+q+r.$$

Załóżmy, bez straty ogólności, że p jest największą z liczb p, q i r. Otrzymujemy ciąg nierówności

$$pqr \geqslant p \cdot 2 \cdot 2 = 4p > 3p > p+q+r,$$

co jest sprzeczne z wcześniej otrzymaną podzielnością.

8. Rozważmy następujące n liczb:

$$(n+1)!+2,\ (n+1)!+3, \ldots, (n+1)!+(n+1).$$

Zauważmy, że liczba $(n+1)!+i$ dzieli się przez i oraz jest większa od i, dla $2 \leqslant i \leqslant n+1$, więc wszystkie te liczby są złożone.

9. Gdyby liczby p, q, r były większe od 2, to skoro są pierwsze, musiałyby być nieparzyste. Wtedy jednak $2 \Big| p^p + q^q$, co jest niemożliwe, gdyż $2 \nmid r^r$. Oznacza to, że co najmniej jedna z liczb p, q, r jest równa 2. Skoro p, q, r są pierwsze, to $p, q \geqslant 2$, więc $r^r = p^p + q^q \geqslant 8$. Nie może zajść więc $r = 2$. W takim razie $p = 2$ lub $q = 2$. Bez straty ogólności załóżmy, że $p = 2$. Pozostaje rozwiązać równanie

$$4 + q^q = r^r.$$

Zauważmy, że skoro $r^r > q^q$, to $r > q$, więc też $r \geqslant q+1$. Zatem
$$r^r \geqslant r^{q+1} > q^{q+1}.$$
Łącząc otrzymane zależności, otrzymujemy
$$q^q + 4 > q^{q+1},$$
i w konsekwencji
$$q^q(q-1) < 4.$$
Jednakże $q-1 \geqslant 1$ oraz $q^q \geqslant 2^2 = 4$, więc
$$(q-1)q^q \geqslant 4,$$
co jest sprzeczne z otrzymaną wcześniej nierównością.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie istnieje trójka liczb pierwszych (p,q,r) spełniająca daną równość.

10. Rozpatrzmy zbiór liczb
$$S = \{0, a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a\}.$$
Wykażemy, że w S każde dwa elementy dają różną resztę z dzielenia przez p. Załóżmy nie wprost, że pewne dwa elementy z S dają taką samą resztę z dzielenia przez p. Oznaczmy je przez $i \cdot a$ oraz $j \cdot a$, gdzie $i \neq j$. Wówczas
$$p \Big| i \cdot a - j \cdot a = (i-j)a.$$
Liczba a nie dzieli się przez p, więc
$$p \Big| i - j.$$
Zakładamy, że $0 \leqslant i, j \leqslant p-1$, więc
$$-p < i - j < p.$$
Skoro zaś $i - j$ jest podzielne przez p, to
$$i - j = 0 \quad \text{czyli} \quad i = j.$$
co przeczy temu, że $i \neq j$. Stąd w zbiorze S znajduje się p elementów, z których każdy daje różną resztę z dzielenia przez p. W zbiorze S są więc wszystkie możliwe reszty z dzielenia przez p. Istnieje zatem taka liczba n, że an daję resztę 1 z dzielenia przez p. Innymi słowy, liczba $an-1$ dzieli się przez p.

18 Kąty i okręgi

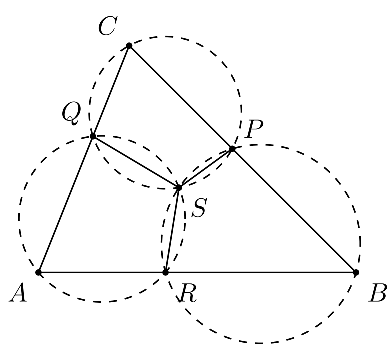
1. Skoro na czworokątach $BPSR$ i $CPSQ$ można opisać okręgi, to zachodzą równości:

$$\sphericalangle RBP + \sphericalangle PSR = 180^\circ,$$

$$\sphericalangle PCQ + \sphericalangle QSP = 180^\circ.$$

Suma miar kątów $\sphericalangle QSR$, $\sphericalangle PSR$ i $\sphericalangle QSP$ równa jest 360°. Łącząc powyższe obserwacje, otrzymujemy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle QSR &= 360^\circ - \sphericalangle PSR - \sphericalangle QSP = \\ &= (180^\circ - \sphericalangle PSR) + (180^\circ - \sphericalangle QSP) = \\ &= \sphericalangle RBP + \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA.\end{aligned}$$



Zadanie 1

Wiadomo, że suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie ABC równa jest 180°, skąd

$$\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 180^\circ - \sphericalangle CAB = 180^\circ - \sphericalangle QAR.$$

Łącząc powyższe równości, dostajemy

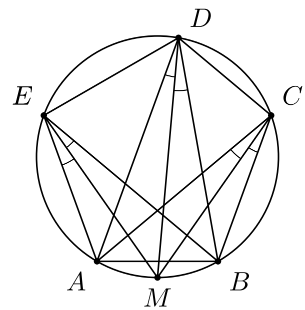
$$\sphericalangle QSR = 180^\circ - \sphericalangle QAR, \quad \sphericalangle QSR + \sphericalangle QAR = 180^\circ,$$

co dowodzi tego, że punkty A, R, S i Q leżą na okręgu.

2. Oznaczmy środek łuku AB niezawierającego pozostałych wierzchołków danego pięciokąta jako M. Wiemy, że łuki AM i MB są równej długości. Stąd kąty na nich oparte są równe, czyli zachodzą równości

$$\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCM, \quad \sphericalangle ADM = \sphericalangle BDM, \quad \sphericalangle AEM = \sphericalangle BEM.$$

Możemy więc stwierdzić, że punkt M leży na wszystkich dwusiecznych danych w zadaniu, co w szczególności dowodzi, że te proste przecinają się w jednym punkcie.



Zadanie 2

3. Korzystając z faktu, że kąty oparte na tym samym łuku mają równe miary, otrzymujemy

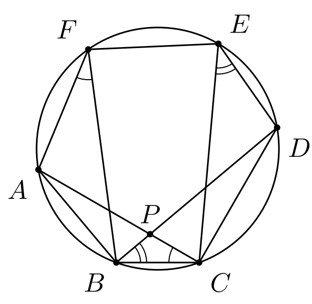
$$\sphericalangle AFB = \sphericalangle ACB \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle CED = \sphericalangle CBD.$$

Wiedząc, że suma miar kątów w trójkącie BPC wynosi $180°$ mamy

$$\sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD = 180° - \sphericalangle BPC = \sphericalangle APB.$$

Łącząc powyższe równości, otrzymujemy, że

$$\sphericalangle AFB + \sphericalangle CED = \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBD = \sphericalangle APB.$$



Zadanie 3

4. Wykażemy, że skoro trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg, to jest on równoramienny. Na mocy własności czworokąta wpisanego w okrąg i tego, że suma miar kątów wewnętrznych trapezu przy jednym ramieniu równa jest $180°$, własność tą potwierdza równość

$$\sphericalangle BAD = 180° - \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Przyjmijmy

$$\alpha = \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD.$$

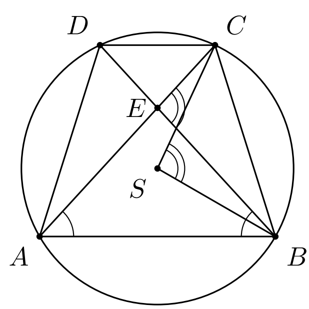
Kąt BSC jest kątem środkowym, a kąt BAC jest kątem wpisanym oraz oba są oparte na tym samym łuku, więc

$$\sphericalangle CSB = 2\alpha.$$

Ponadto mamy, że

$$\sphericalangle CEB = 180° - \sphericalangle AEB = \sphericalangle EAB + \sphericalangle EBA = 2\alpha.$$

Teza wynika wprost z dwóch powyższych równości.



Zadanie 4

5. Oznaczmy przez P punkt przecięcia okręgów opisanych na kwadratach $BCFE$ i $ACGH$, różny od punktu C. Wykażemy, że leży on na każdej z prostych o których mowa w tezie.

Najpierw wykażemy, że punkt P leży na prostej BG. Z własności kątów wpisanych w okrąg opartych na tym samym łuku mamy

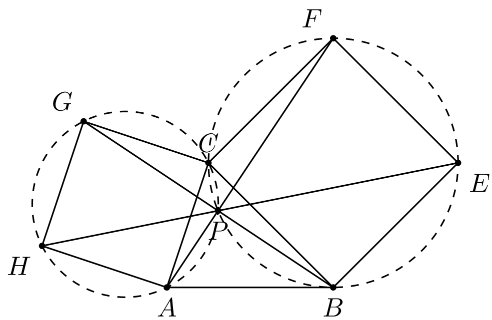
$$\begin{aligned}\sphericalangle GPC + \sphericalangle BPC &= \sphericalangle GAC + (180° - \sphericalangle BFC) = \\ &= 45° + (180° - 45°) = 180°.\end{aligned}$$

Punkty B, P i G są więc współliniowe. Fakt, że punkty A, P i F również leżą na jednej prostej dowodzimy w sposób analogiczny.

Pozostało wykazać, że punkty H, P i E są współliniowe. Na mocy własności kątów wpisanych opartych na tym samym łuku mamy

$$\sphericalangle CPH + \sphericalangle CPE = \sphericalangle CAH + \sphericalangle CBE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

co kończy dowód.

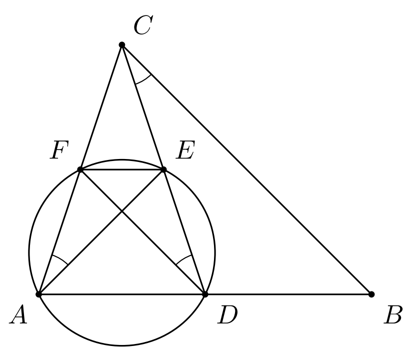


Zadanie 5

6. Oznaczmy przez F środek odcinka AC. Prosta FD jest wówczas linią środkową w trójkącie ABC, czyli $FD \,||\, BC$, skąd

$$\sphericalangle FDE = \sphericalangle FDC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CAE = \sphericalangle FAE,$$

czyli punkty A, D, E, F leżą na okręgu.



Zadanie 6

Pozostaje zauważyć, że na mocy twierdzenia o linii środkowej odcinki FE i AD są do siebie równoległe. Stąd czworokąt $ADEF$ jest trapezem, a skoro można na nim opisać okrąg, to jest równoramienny. Rozwiązanie kończy równość:

$$AC = 2 \cdot AF = 2 \cdot DE = CD.$$

7. Niech D, E, F oznaczają spodki wysokości opuszczonych odpowiednio z punktów A, B, C. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\sphericalangle AHB = \sphericalangle AHF + \sphericalangle FHB = \\ &= (90° - \sphericalangle FAH) + (90° - \sphericalangle FBH) = \\ &= (90° - \sphericalangle BAD) + (90° - \sphericalangle ABE) \\ &= \sphericalangle ABD + \sphericalangle BAE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = \\ &= 180° - \sphericalangle ACB.\end{aligned}$$

Skoro punkty H i H' są symetryczne względem prostej AB, to trójkąty $AH'B$ oraz AHB są do siebie przystające, czyli

$$\sphericalangle AH'B = \sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle ACB.$$

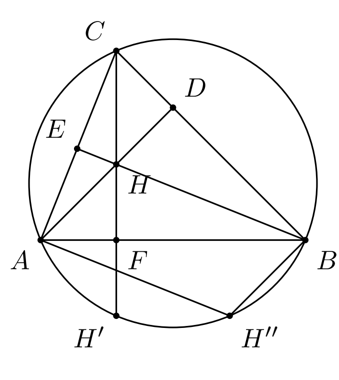
Z powyższej równości wynika, że punkt H' leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Z tego, że punkt H'' jest odbiciem punktu H względem środka odcinka AB wynika, że czworokąt $AH''BH$ jest równoległobokiem, skąd mamy

$$\sphericalangle AH''B = \sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle ACB,$$

co dowodzi, że punkt H'' również leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC.

Wykazaliśmy, że punkty H' i H'' leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC, co jest równoważne temu, że na pięciokącie $AH'H''BC$ można opisać okrąg.



Zadanie 7

8. Z Twierdzenia 2 ze skryptu wynika, że

$$\sphericalangle EAC = \sphericalangle ABC \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle DAE = 180^\circ - \sphericalangle ACB.$$

Łącząc pierwszą z powyższych równości z tym, że $AC = BC$ i $AE = BD$, wnioskujemy, że trójkąty EAC i DBC są do siebie przystające. Mamy więc $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DCB$, czyli

$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACE = \sphericalangle DCA + \sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB.$$

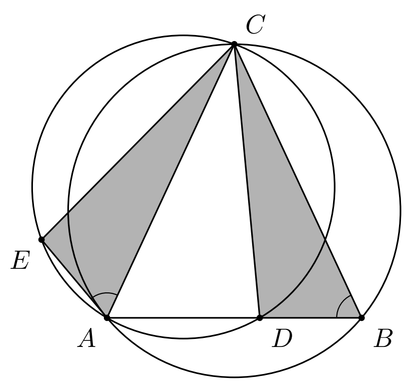
Stąd otrzymujemy, że

$$\sphericalangle DAE + \sphericalangle DCE = (180^\circ - \sphericalangle ACB) + \sphericalangle ACB = 180^\circ,$$

czyli punkty A, D, C i E leżą na jednym okręgu. Korzystając z faktu, że kąty oparte na tym samym łuku mają równe miary, otrzymujemy, że

$$\sphericalangle EDA = \sphericalangle ACE = \sphericalangle DCB,$$

co było do udowodnienia.



Zadanie 8

9. *Odpowiedź.* Kąt $\sphericalangle ACB$ ma miarę 60°.

Skoro na czworokątach $ABDE$ i $CDFE$ można opisać okręgi, to:

$$\begin{aligned}\sphericalangle FDC &= 180^\circ - \sphericalangle FDB = 180^\circ - \sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle AEB \\ &= 180^\circ - \sphericalangle AEF = \sphericalangle FEC = 180^\circ - \sphericalangle FDC,\end{aligned}$$

czyli $\sphericalangle ADC = \sphericalangle FDC = 90^\circ$. Analogicznie dowodzimy, że $\sphericalangle BEC = 90^\circ$.

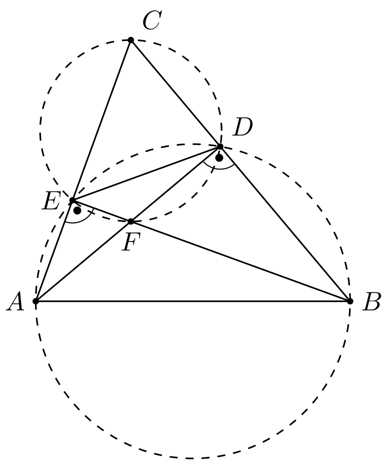
Ponadto prawdziwa jest równość

$$\sphericalangle DEC = 180^\circ - \sphericalangle AED = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ABC.$$

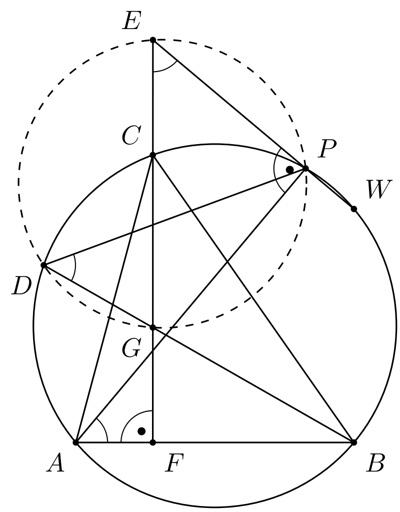
Podobnie $\sphericalangle EDC = \sphericalangle BAC$, zatem trójkąty ABC i DEC są podobne, a skala tego podobieństwa wynosi $\frac{AB}{DE} = 2$. Stąd wynika, że

$$AC = 2 \cdot CD.$$

Ponadto, jak już wykazaliśmy, trójkąt ADC jest prostokątny, zatem jest to trójkąt charakterystyczny 30-60-90 (połówka trójkąta równobocznego), skąd wiemy, że kąt ACB ma miarę 60°.



Zadanie 9



Zadanie 10

10. Niech F oznacza spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Na mocy tego, że kąty oparte na tym samym łuku są równej miary, otrzymujemy

$$\sphericalangle FEP = \sphericalangle GEP = \sphericalangle GDP = \sphericalangle BDP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle FAP,$$

zatem punkty A, F, P, E leżą na okręgu. Pozostaje zauważyć, że

$$\sphericalangle APW = 180° - \sphericalangle APE = 180° - \sphericalangle AFE = 90°,$$

czyli odcinek AW rzeczywiście jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC.

19 Układy

1. Podnosząc strony pierwszego równania do kwadratu, mamy

$$x^2+2xy+y^2=1.$$

Odejmując $x^2+y^2=1$ stronami od powyższego równania, otrzymamy $2xy=0$. Możemy więc wywnioskować, że co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0. Wówczas na mocy równości $x+y=1$ druga z nich musi być równa 1. Możemy sprawdzić, że pary $(x,y)=(0,1)$ oraz $(x,y)=(1,0)$ są jedynymi rozwiązaniami układu.

2. Dodajmy stronami wszystkie trzy równania. Otrzymamy wówczas

$$\begin{aligned}0&=(x^2+2y+1)+(y^2+2z+1)+(z^2+2x+1)=\\&=(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+(z^2+2z+1)=\\&=(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2.\end{aligned}$$

Skoro suma kwadratów liczb rzeczywistych jest zerem tylko wtedy, gdy każdy z nich jest zerem, to

$$x+1=y+1=z+1=0,$$

czyli $x=y=z=-1$. Wstawiając otrzymany wynik do wyjściowego układu, sprawdzamy, że istotnie trójka $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$ jest jego rozwiązaniem.

3. Mnożąc wszystkie trzy równania stronami, otrzymamy

$$a^2b^2c^2=abc.$$

Skrócić przez abc możemy teraz jedynie gdy $abc\neq 0$.

Jeśli $abc=0$, to oznacza to, że co najmniej jedna z liczb a,b,c równa jest zero. Gdyby tą liczbą było a, to z pierwszego i trzeciego równania wynika, że również $b=c=0$. Podobny rezultat otrzymamy zakładając, że $b=0$ lub $c=0$. Więc w tym przypadku otrzymujemy jedną trójkę spełniającą warunki zadania – $(a,b,c)=(0,0,0)$.

Załóżmy odtąd, że $abc \neq 0$. Możemy więc podzielić równanie przez abc, uzyskując

$$a^2b^2c^2 = abc, \quad \text{czyli} \quad abc = 1.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez c, dostajemy $abc = c^2$, czyli $c^2 = 1$, zatem $c = \pm 1$. Analogicznie $a = \pm 1$ i $b = \pm 1$. Pozostaje rozstrzygnąć, jakie znaki należy dobrać. Sprawdzając wszystkie możliwe przypadki, otrzymamy, że jedynymi niezerowymi rozwiązaniami są

$$(a,b,c) = (1,1,1),\ (-1,-1,1),\ (1,-1,-1),\ (-1,1,-1).$$

4. Odejmijmy równania stronami (redukujemy w ten sposób liczbę 2019). Mamy więc

$$0 = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx,$$

co po pomnożeniu stronami przez 2 daje

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = \\ &= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2, \end{aligned}$$

co wobec wspomnianego we wstępie faktu daje

$$x = y = z.$$

Wstawiając te równości do pierwszego równania, otrzymamy

$$3x^2 = 2019,$$

czyli $x = \sqrt{673}$ lub $x = -\sqrt{673}$. Sprawdzamy, że obie trójki $(\sqrt{673}, \sqrt{673}, \sqrt{673})$, $(-\sqrt{673}, -\sqrt{673}, -\sqrt{673})$ są rozwiązaniami.

5. Zauważmy, że gdyby zachodziła nierówność $x > 1$, to

$$x^3 + y^3 \geqslant x^3 > 1.$$

Skoro wobec treści zadania liczby x, y są nieujemne, to możemy wywnioskować, że $x,\ y \leqslant 1$. Mamy więc $0 \leqslant x \leqslant 1$, czyli $0 \leqslant (1-x)x^3$. Oznacza to, że $x^4 \leqslant x^3$, a równość zachodzi tylko dla $x = 0$ lub $x = 1$. Analogicznie uzasadniamy, że $y^4 \leqslant y^3$. Mamy więc

$$1 = x^4 + y^4 \leqslant x^3 + y^3 \leqslant 1,$$

zatem we wszystkich powyższych nierównościach musi zajść równość; toteż $x, y \in \{0,1\}$. Łatwo się przekonać, że tylko pary $(0,1)$, $(1,0)$ spełniają zadany układ równań.

6. Odejmując pierwsze dwa równania stronami, dostajemy

$$ab - bc = a - c,$$

$$b(a-c) = (a-c).$$

Moglibyśmy dokonać skrócenia, o ile wiedzielibyśmy, że $a-c \neq 0$. Gdyby istotnie zachodziło $a-c \neq 0$, to otrzymalibyśmy $b=1$. Wówczas pierwsze równanie przybrałoby jednak postać

$$a = a+1,$$

co jest oczywiście niemożliwe. Oznacza to, że zachodzić musi równość $a-c=0$, czyli $a=c$. Odejmując teraz trzecie równanie od drugiego, dostaniemy w analogiczny sposób $a=b$, czyli $a=b=c$. Wstawiając otrzymany wynik do pierwszego równania, mamy $a^2=2a$, czyli $a=0$ lub $a=2$. Sprawdzamy, że obie trójki $(0,0,0)$, $(2,2,2)$ są rozwiązaniami układu.

7. Dla każdego $x \neq 0$ zachodzi równość

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\left(x^2+1\right).$$

Mnożąc dane równania stronami, otrzymujemy, że

$$\frac{1}{xy}(x^2+1)(y^2+1) = (x^2+1)(y^2+1).$$

Skoro

$$(x^2+1)(y^2+1) \geqslant 1,$$

to

$$(x^2+1)(y^2+1) \neq 0,$$

zatem otrzymana równość oznacza $\frac{1}{xy}=1$, czyli $xy=1$. Stąd

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{i} \quad \frac{1}{x} = y,$$

co po wstawieniu do pierwszego równania i skorzystaniu z pierwszej poczynionej obserwacji daje

$$\frac{1}{y}(y^2+1) = y^2+1,$$

zatem $y=1$, czyli $x=\frac{1}{y}=1$. Sprawdzamy, że para $(1,1)$ jest rozwiązaniem danego układu.

8. Podnieśmy oba dane równania do kwadratu stronami, uzyskując
$$x^2 - 2xyz + y^2z^2 = 1 \quad \text{i} \quad x^2z^2 + 2xyz + y^2 = 4.$$
Zauważmy, że możemy zredukować wyraz $2xyz$, dodając powyższe równania stronami. Wówczas
$$\begin{aligned} 5 &= x^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + y^2 = \\ &= x^2(1+z^2) + y^2(1+z^2) \\ &= (x^2+y^2)(1+z^2). \end{aligned}$$
Zapisaliśmy zatem liczbę 5 jako iloczyn dwóch nieujemnych liczb całkowitych. Daje nam to dwa przypadki:

1. $x^2 + y^2 = 5$ i $z^2 + 1 = 1$. Stąd natychmiast otrzymujemy $z = 0$. Zanim zaczniemy rozpatrywać pierwszą równość, wstawmy $z = 0$ do wyjściowego układu. Otrzymujemy od razu $x = 1$, $y = 2$, co jest zgodne z założeniami tego przypadku. Sprawdzamy, że trójka $(1,2,0)$ jest rozwiązaniem układu.
2. $x^2 + y^2 = 1$ i $z^2 + 1 = 5$. Z pierwszego równania wynika, że co najmniej jedna z liczb x, y jest równa 0. W przeciwnym wypadku każda z nich byłaby nie mniejsza niż 1, zatem ich suma byłaby niemniejsza od 2, zatem różna od 1. Załóżmy najpierw, że $x = 0$. Wstawiając ten warunek do układu, mamy $-yz = 1$ i $y = 2$, co daje sprzeczność, bo z równości tych wynikałoby, że $z = -\frac{1}{2}$, co nie jest liczbą całkowitą. Załóżmy teraz, że $y = 0$. Wtedy $x = 1$ i $xz = 2$, skąd $z = 2$. Sprawdzamy, że trójka $(1,0,2)$ jest rozwiązaniem układu.

9. Zauważmy najpierw, że jeśli któraś z liczb x, y, z równa jest zeru to pozostałe również są zerami, co daje rozwiązanie $(0,0,0)$. Zakładamy więc dalej, że $x, y, z \neq 0$.

Lewe strony wszystkich równań, jako ilorazy liczb nieujemnych, są nieujemne, czyli $x, y, z > 0$. Zauważmy dalej, że $(x-1)^2 \geqslant 0$ daje po rozwinięciu nierówność $\frac{x^2+1}{2} \geqslant x$, a ponieważ $x > 0$, to też $\frac{2}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{x}$, zatem z pierwszego równania dostajemy
$$y = \frac{2x^2}{1+x^2} \leqslant \frac{x^2}{x} = x.$$

Analogicznie, z drugiego i trzeciego równania uzyskujemy odpowiednio $z \leqslant y$ i $x \leqslant z$. Podsumowując, uzyskaliśmy

$$y \leqslant x \leqslant z \leqslant y,$$

co oznacza, że $x = y = z$. Mamy więc, że $\frac{2x^2}{1+x^2} = x$, skąd uzyskujemy równanie

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2 = 0.$$

Ostatecznie uzyskujemy, że tylko trójki $(0,0,0)$ i $(1,1,1)$ mogą spełniać warunki zadania. Sprawdzamy, że tak istotnie jest.

10. Odejmijmy stronami drugie równanie od pierwszego. Mamy

$$x^2 - y^2 = y - x,$$

$$(x-y)(x+y) + (x-y) = 0,$$

$$(x-y)(x+y+1) = 0.$$

Iloczyn liczb równy jest 0 gdy co najmniej jedna z nich jest równa 0.

Rozważmy pierwszy przypadek: $x - y = 0$, czyli $x = y$.
Układ przybiera wtedy postać:

$$\begin{cases} x^2 = x + z \\ z^2 + 2 = x. \end{cases}$$

Dodajmy równania stronami i przenieśmy wszystko na lewą stronę. Uzyskamy

$$x^2 - 2x + z^2 - z + 2 = 0.$$

Zauważmy jednak, że zachodzi równość

$$x^2 - 2x + z^2 - z + 2 = (x-1)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0,$$

więc w tym przypadku układ nie ma rozwiązań.

Rozważmy drugi przypadek, gdy $x + y = -1$. Podstawiając ten warunek do równania trzeciego, natychmiast uzyskujemy sprzeczność:

$$z^2 = -2 - \frac{1}{2} < 0.$$

Powyższe rozumowanie dowodzi, że dany układ równań nie ma rozwiązań w liczbach rzeczywistych.

20 Potęgi

1. Zauważmy, że zachodzą nierówności
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + n > n^2,$$
zatem liczba $n^2 + n$ leży pomiędzy dwoma kolejnymi kwadratami, więc na mocy Faktu ze skryptu liczba ta nie może być kwadratem.

2. Zauważmy, że $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, zatem jeśli jest to liczba parzysta, to któraś z liczb $a-b$, $a+b$ jest parzysta. Ale ich różnica, równa $2b$, także jest parzysta, zatem jeśli jedna z tych liczb jest parzysta, to druga też. To oznacza, że liczba $(a-b)(a+b)$ jest podzielna przez 4, co chcieliśmy udowodnić.

3. Iloczyn kwadratów liczb całkowitych
$$(abc) \cdot (bcd) \cdot (cda) \cdot (dab) = (abcd)^3$$
jest kwadratem liczby całkowitej, więc liczba $(abcd)^3$ także nim jest, a co za tym idzie jest nim również liczba
$$abcd = \frac{(abcd)^3}{(abcd)^2}.$$
Skoro liczby $abcd$ i bcd są kwadratami liczb całkowitych, to liczba $a = \frac{abcd}{bcd}$ także nim jest. Analogicznie dowodzimy, że każda z liczb b, c, d jest kwadratem liczby całkowitej.

4. *Sposób 1.*
Niech $p^2 + q = a^2$. Wtedy
$$q = a^2 - p^2 = (a-p)(a+p).$$
Wiemy, że $a > p$ i $a + p > a - p$, a ponadto q jest liczbą pierwszą, zatem $a + p = q$ i $a - p = 1$. Odejmując te dwa równania stronami, mamy $2p = q - 1$, czyli $q = 2p + 1$. Jeśli także $q^2 + p$ byłoby kwadratem liczby całkowitej, to analogicznie mielibyśmy, że $p = 2q + 1$. Obie te równości nie mogą jednak zachodzić równocześnie.

Sposób 2.
Zauważmy, że zachodzi co najmniej jedna z równości $q \leqslant p$ i $p \leqslant q$. Załóżmy bez straty ogólności, że $q \leqslant p$. Wtedy

$$p^2 < p^2 + q < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2,$$

więc $p^2 + q$ znajduje się pomiędzy dwoma kwadratami liczb całkowitych, więc na mocy Faktu ze skryptu, liczba ta nie może być kwadratem liczby całkowitej.

5. Dla $x = 1$ dostajemy rozwiązanie $(x,y) = (1,0)$, dla $x = 2$ mamy rozwiązanie $(x,y) = (2,0)$. Zauważmy, że dane równanie możemy przekształcić

$$x^2 - 3x + 2 = y^2 + 2y,$$

$$x^2 - 3x + 3 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2.$$

Dla $x \geqslant 3$ mamy

$$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4 < x^2 - 3x + 3 < x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2,$$

toteż $x^2 - 3x + 3$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.

W rezultacie pary $(x,y) = (1,0)$, $(2,0)$ są jedynymi rozwiązaniami.

6. Niech $p^2 + pq + q^2 = a^2$ dla pewnej liczby naturalnej a. Przyjmijmy bez straty ogólności, że $q \geqslant p$. Wtedy

$$pq = (p+q)^2 - a^2 = (p+q-a)(p+q+a).$$

Wiemy, że $p+q+a > p+q-a$, więc albo mamy

$$\begin{cases} p+q+a = pq \\ p+q-a = 1 \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} p+q+a = q \\ p+q-a = p. \end{cases}$$

Druga z tych opcji jest niemożliwa, gdyż $p+q+a > q$. Zatem

$$p+q+a = pq \quad \text{i} \quad p+q-a = 1,$$

czyli po dodaniu stronami

$$2p + 2q = pq + 1,$$

$$(p-2)(q-2) = 3.$$

Czyli liczby $p-2$, $q-2$ to 1 i 3 w pewnej kolejności. Zatem pary $(3,5)$, $(5,3)$ jako jedyne spełniają warunki zadania.

7. Niech a^{2019} będzie iloczynem liczb z tablicy. Jeśli liczba a jest napisana na tablicy, to możemy ją zetrzeć, otrzymując iloczyn a^{2018}. Jeśli tej liczby nie ma na tablicy, dopisujemy ją, otrzymując iloczyn a^{2020}. Możemy to zrobić, gdyż iloczyn wszystkich liczb jest nie większy od k^{2019}, a stąd $a \leqslant k$. W tym zaś przypadku a nie ma na tablicy, zaś k jest, więc $a \neq k$.

8. Zauważmy, że dla $n = ab$ mamy

$$(a+n)(b+n) = (a+ab)(b+ab) = ab\cdot(a+1)(b+1).$$

Ostatnie wyrażenie jest iloczynem dwóch kwadratów, a więc jest kwadratem liczby całkowitej.

Pozostaje tylko zapewnić, że $n = ab > 1$. Równość $ab = 1$ zachodzi tylko wtedy, gdy $a = 1$ i $b = 1$. Wówczas $n = 2$ spełnia warunki zadania.

9. Dana równość jest równoważna równości

$$\left(ab - c^2\right)\left(bc - a^2\right)\left(ca - b^2\right) = 0.$$

Zauważmy, że oznacza to, iż iloczyn pewnych dwóch z tych liczb jest kwadratem trzeciej, co dowodzi tezy.

10. Analogicznie jak w rozwiązaniu zadania czwartego dostajemy $q = 2p+1$. Załóżmy, że $q^2 + p^n = a^2$. Wtedy

$$p^n = a^2 - q^2 = (a+q)(a-q).$$

Jedyne dzielniki liczby p^n są postaci p^i, gdyż p jest liczbą pierwszą. To oznacza, że $a+q = p^k$ i $a-q = p^{n-k}$ dla pewne liczby całkowitej k. Odejmując te równania stronami, mamy $p^k - p^{n-k} = 2q$.

Rozważmy dwa przypadki:

1. Załóżmy, że $p = 2$. Wtedy $q = 5$, czyli $2^k - 2^{n-k} = 10$. Łatwo jednak zauważyć, że to niemożliwe, gdyż jeśli $n-k$ jest równe co najmniej 2, to lewa strona jest podzielna przez 4 w przeciwieństwie do prawej, a jeśli $n-k \leqslant 1$, to $2^k = 10 + 2^{n-k}$, co jest równe 12 lub 11, jednak żadna z tych liczb nie jest potęgą dwójki. To daje sprzeczność.

2. Załóżmy, że $p > 2$. Wiemy, że

$$p^k - p^{n-k} = 2q = 2(2p+1) = 4p+2.$$

Prawa strona tego równania nie jest podzielna przez p, zatem lewa też nie może być, zatem

$$n-k=0 \quad \text{i} \quad p^k = 4p+3,$$

lub równoważnie $p^k - 4p = 3$. Lewa strona jest podzielna przez p, zatem prawa strona też, stąd liczba 3 musi być podzielna przez p, a więc $p = 3$. Jednak wtedy $3^k = 4 \cdot 3 + 3 = 15$, co jest niemożliwe, gdyż 15 nie jest potęgą trójki.

Sprzeczność uzyskana w obu przypadkach kończy rozwiązanie zadania.

11. Wykażemy, że taki zbiór istnieje. Niech P będzie liczbą pierwszą większą od $1+2+...+2020$. Rozpatrzmy zbiór S dany jako

$$S = \{P, 2P, 3P, ..., 2020P\}.$$

Uzasadnimy, że suma elementów dowolnego jego podzbioru nie jest potęgą liczby całkowitej.

Na początku zauważmy, że suma wszystkich elementów zbioru S spełnia, na mocy założenia o liczbie P, zależność

$$P + 2P + ... + 2020P = (1+2+...+2020)P < P^2.$$

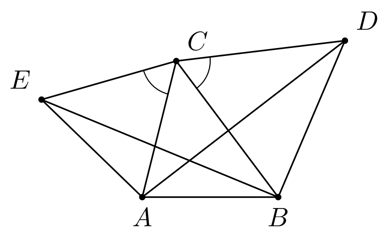
Zauważamy, że skoro każdy element S jest podzielny przez P, to suma elementów dowolnego podzbioru S również jest podzielna przez P. Ta suma będzie wszelako nie większa od sumy wszystkich elementów ze zbioru S, czyli mniejsza od P^2. W szczególności nie będzie ona podzielna przez P^2.

Jeśli liczba postaci a^k, dla pewnych liczb całkowitych $a, k > 1$, jest podzielna przez liczbę pierwszą P, to liczba a jest podzielna przez P. Więc liczba a^k jest podzielna przez P^k, i w szczególności przez P^2.

Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy, że zbiór S spełnia warunki zadania.

21 Obroty

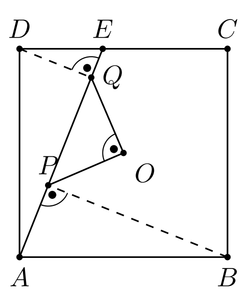
1. Wiadomo, że $CD = CB$ i $\sphericalangle BCD = 60°$. Rozpatrzmy więc taki obrót o kąt $60°$ wokół punktu C, aby punkt D przeszedł na punkt B. Trójkąt ACE również jest równoboczny, więc punkt A przejdzie w tym obrocie na punkt E. Czyli odcinek AD przejdzie na odcinek BE. Z Faktu ze skryptu wnioskujemy, że $AD = BE$.



Zadanie 1

2. Rozpatrzmy taki obrót wokół punktu O o kąt $90°$, że punkt D przechodzi na punkt A. Wtedy punkt A przechodzi na punkt B. Prosta AE przejdzie na prostą przechodzącą przez B i prostopadłą do AE – na prostą BP. Podobnie uzasadniamy, że prosta DQ przejdzie na prostą AE.

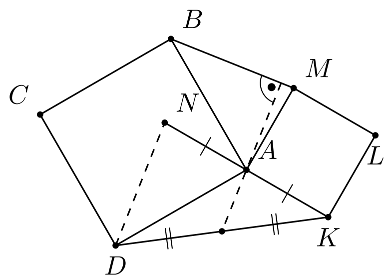
Stąd punkt Q – przecięcie prostych DQ i AE – przejdzie w rozpatrywanym obrocie na punkt przecięcia obrazów tych prostych, czyli na punkt P. Zatem $\sphericalangle POQ = 90°$ i $OP = OQ$, co kończy dowód.



Zadanie 2

3. Rozważmy obrót trójkąta ABM wokół A taki, żeby punkt B przeszedł na punkt D. Łatwo zauważyć, że jest to obrót o $90°$.

Niech N będzie obrazem punktu M. Skoro mamy $AM \perp AK$ oraz $AM = AK$, to obracając punkt M o $90°$, otrzymamy taki punkt N na prostej AK, że punkt A będzie środkiem KN. W rezultacie, środkowa trójkąta DAK opuszczona z A przechodzi przez środki boków DK i KN, więc na mocy twierdzenia o linii środkowej jest ona równoległa do DN. Zaś prosta DN jest prostopadła do prostej BM (powstała przez jej obrót o $90°$). Łącząc powyższe wnioski otrzymujemy tezę.



Zadanie 3

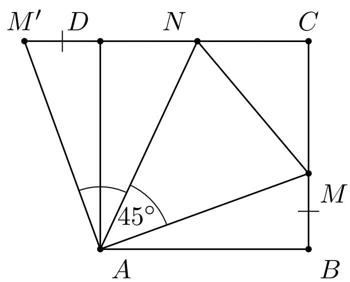
4. Rozważmy obrót o $90°$ wokół punktu A taki, że punkt B przechodzi na punkt D. Niech obrazem punktu M będzie punkt M'. Wówczas M' leży na prostej CD. Ponadto $AM' = AM$ oraz

$$NM' = BM + DN = BC - CM + CD - CN = MN,$$

Na mocy cechy bok-bok-bok mamy więc $\Delta AMN \equiv \Delta AM'N$. Zatem

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle NAM' = \sphericalangle BAM + \sphericalangle NAD = 90° - \sphericalangle MAN.$$

Wobec tego wykazaliśmy, że $\sphericalangle MAN = 45°$.



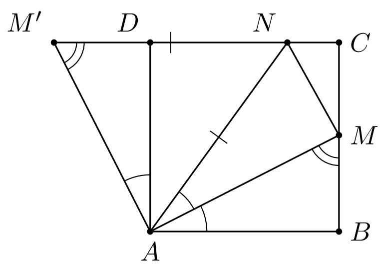
Zadanie 4

5. Rozważmy obrót o 90° wokół punktu A taki, że punkt B przechodzi na punkt D. Niech obraz punktu M to będzie punkt M'. Skoro punkt M leżał na prostej BC, to punkt M' leży na jej obrazie – prostej CD. Ponadto $DM' = BM$ oraz

$$\sphericalangle AM'N = \sphericalangle AMB = 90^\circ - \sphericalangle BAM = 90^\circ - \sphericalangle MAN = \sphericalangle NAM',$$

stąd trójkąt NAM' jest równoramienny. Mamy więc, że

$$AN = NM' = ND + DM' = DN + BM.$$



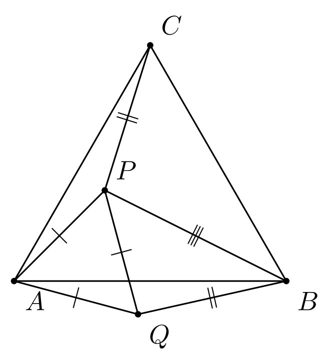
Zadanie 5

6. Rozważmy obrót o kąt 60° punktu P wokół A taki, że C przechodzi na B. Niech punkt Q będzie obrazem punktu P, wówczas zachodzą równości

$$AP = AQ \quad \text{i} \quad \sphericalangle PAQ = 60^\circ,$$

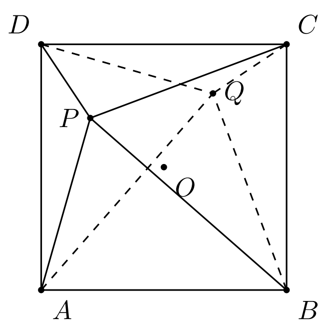
skąd trójkąt APQ jest równoboczny, więc $PQ = AP$.

Pozostaje zauważyć, że z własności obrotu wynika, że $BQ = CP$, czyli trójkąt BPQ ma boki długości AP, BP, CP, co kończy dowód.

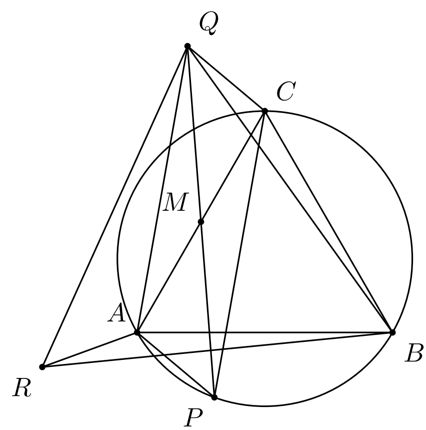


Zadanie 6

7. Rozważmy obrót wokół środka kwadratu taki, że punkt A przechodzi na punkt D. Łatwo zauważyć, że jest to obrót o kąt prosty. Wówczas prosta AP przechodzi na prostą l_D, prosta BP przechodzi na prostą l_A, prosta CP przechodzi na prostą l_B oraz prosta DP przechodzi na prostą l_C. Wobec tego, skoro proste AP, BP, CP, DP przechodzą przez punkt P, to proste l_A, l_B, l_C, l_D będą przechodziły przez obraz punktu P w rozpatrywanym obrocie. Stąd wniosek, że przecinają się w jednym punkcie.



Zadanie 7



Zadanie 8

8. Rozważmy obrót wokół B taki, że punkt C przechodzi na punkt A. Niech obrazem punktu Q będzie przy tym obrocie punkt R. Wówczas, skoro punkt M to środek PQ i AC, to $APCQ$ jest równoległobokiem, więc $AP = QC$ oraz

$$\sphericalangle PAQ = \sphericalangle QCP = 180° - \sphericalangle CPA = 180° - \sphericalangle CBA = 120°.$$

Z drugiej strony mamy $RA = QC$ oraz

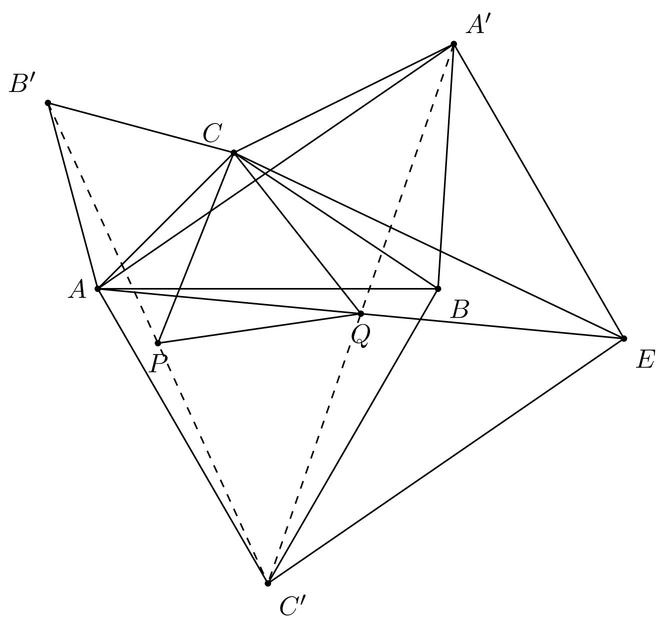
$$\begin{aligned}\sphericalangle QAR &= 360° - \sphericalangle PAQ - \sphericalangle RAB + \sphericalangle PAB = \\ &= 360° - \sphericalangle PAQ - \sphericalangle QCB + \sphericalangle PCB = \\ &= 360° - \sphericalangle PAQ - \sphericalangle QCP = 120° = \sphericalangle PAQ.\end{aligned}$$

Wobec tego trójkąty RAQ i PAQ są przystające, na mocy cechy kąt-bok-kąt, a stąd $PQ = RQ$. Zauważmy jednak, że trójkąt BQR jest równoboczny, w związku z tym $RQ = BQ$, co kończy dowód.

9. Rozważmy obrót o kąt $60°$ wokół punktu C. Wtedy punkt B' przechodzi na punkt A oraz punkt B przechodzi na punkt A'.

Niech punkt E będzie obrazem punktu C' przy tym obrocie. Skoro $\sphericalangle AC'B = 60°$ i skoro obróciliśmy odcinek $C'B$ o $60°$, otrzymując odcinek $A'E$, to możemy wywnioskować, że proste $A'E$ oraz $C'A$ są równoległe. Mamy też, że $A'E = BC' = AC'$, zatem czworokąt $AC'EA'$ jest równoległobokiem. Stąd odcinki $AE, A'C'$ przecinają się w połowie, czyli w punkcie Q.

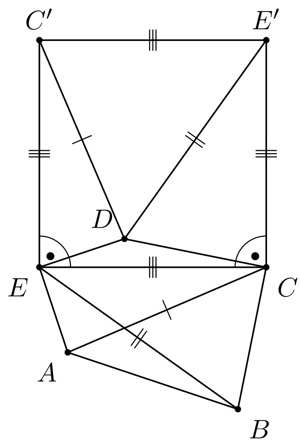
Zauważmy jednak, że obrazem odcinka $B'C'$ jest AE, więc obrazem punktu P musi być punkt Q. Skoro obrót był o $60°$, to mamy, że $CP = CQ$ oraz $\sphericalangle PCQ = 60°$, co daje nam, że trójkąt CPQ jest równoboczny.



Zadanie 9

10. Rozważmy obrót wokół punktu C taki, że punkt B przechodzi na punkt D. Niech obrazem punktu E przy tym obrocie będzie punkt E'. Wówczas

$$E'D = BE, \quad E'C = CE, \quad E'C \perp CE.$$



Zadanie 10

Analogicznie, niech obrazem punktu C po obrocie wokół punktu E takim, że punkt A przechodzi na punkt D, będzie punkt C'. Wówczas

$$C'D = AC, \quad EC' = CE, \quad EC' \perp CE.$$

Stąd czworokąt $CEC'E'$ jest kwadratem i w rezultacie $C'E' = CE$. Wobec tego trójkąt $DC'E'$ ma boki długości CE, AC, BE, co kończy dowód.

22 Niezmienniki

1. *Odpowiedź.* Nie można.

Rozpatrywanym niezmiennikiem będzie parzystość wyniku rozpatrywanego działania. Zastanówmy się, jak się ona zmienia, gdy zamienimy znak $+$ na znak $-$. Niech wynik poprzedniego wyrażenia przed tą zamianą to S. Przypuśćmy, że zamieniamy znak przy liczbie k. Skoro zamiast dodawać liczbę k odejmujemy ją, to po zamianie suma wszystkich liczb będzie wynosić $S-2k$. Oczywiście liczba $S-2k$ jest tej samej parzystości co S. W takim razie, parzystość wyniku wyrażenia nie zmienia się podczas zmieniania znaku $+$ na $-$. W szczególności, parzystość wyniku zawsze będzie taka sama, jak parzystość liczby $1+2+...+1017=\frac{1017\cdot 1018}{2}=517653$. Stąd wartość tej sumy zawsze będzie liczbą nieparzystą. W szczególności nigdy nie będzie ona równa 0. Stąd taka zamiana znaków nie jest możliwa.

2. *Odpowiedź.* Nie jest to możliwe.

Tym razem rozważmy parzystość liczby minusów na szachownicy. Zauważmy, że podczas dowolnego dozwolonego ruchu, zmieniamy znaki na przeciwne w dokładnie 2020 polach. Jeśli k jest liczbą minusów w zmienianych polach, to liczba minusów po zmianie, równa liczbie plusów przed zmianą, wynosi $2020-k$. Łatwo sprawdzić, że liczba k jest tej samej parzystości, co $2020-k$. W takim razie parzystość liczby minusów wśród zmienionych pól nie zmienia się. Stąd parzystość liczby minusów na planszy również pozostaje stała.

Na początku na planszy jest tylko jeden minus, czyli nieparzyście wiele. Zatem zawsze będzie ich nieparzyście wiele. Wobec tego niemożliwym jest, żeby uzyskać szachownicę z parzystą liczbą minusów, w szczególności z zerową liczbą minusów. Dowodzi to faktu, że uzyskanie szukanej szachownicy nie jest możliwe.

3. Zauważmy, że po wykonanej operacji na okręgu będzie nadal n liczb. W tym zadaniu korzystamy z półniezmiennika, którym jest suma wszystkich n liczb. Zbadamy, jak może się on zmienić po wykonanej operacji.

Wykażemy najpierw, że suma wszystkich liczb nie zmniejszy się po wykonanej operacji. Nazwijmy liczby na okręgu przed wykonaniem tej operacji

$$a_1, a_2, \ldots, a_n.$$

Niech b_i będzie liczbą wpisaną pomiędzy liczby a_i i a_{i+1} (dla każdego i). Zauważmy, że $b_i \geqslant a_i$, ponieważ $b_i = max(a_i, a_{i+1})$. W takim razie, po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n \geqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Stąd wiemy, że rozważana suma nigdy się nie zmniejsza.

Zastanówmy się, kiedy suma po wykonanej operacji pozostanie taka sama. Wówczas dla każdej liczby i musi zachodzić $a_i = b_i$. Ponieważ $b_i \geqslant a_{i+1}$, to musiałoby zachodzić $a_i \geqslant a_{i+1}$ dla każdego numerka pozycji i. Wobec tego możemy napisać następujący ciąg nierówności

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant a_1.$$

W istocie wszystkie one są równościami. Czyli suma wszystkich liczb po wykonanej operacji pozostaje taka sama wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby poprzednio były równe, a w przeciwnym razie suma ta się zwiększy.

Teraz zastanówmy się, jaką maksymalną wartość może osiągnąć ta suma podczas wykonywania operacji. Niech A będzie największą spośród liczb napisanych na początku na okręgu. Wówczas podczas wykonywania operacji żadna liczba nie może przekroczyć A, czyli suma wszystkich liczb wynosi zawsze co najwyżej $A \cdot n$.

Zauważamy więc, że suma zapisanych liczb nie może się zwiększać w sposób nieograniczony. A stąd możemy wywnioskować, że przy pewnym wykonaniu operacji suma nie wzrośnie. Udowodniliśmy wcześniej, że wtedy wszystkie liczby będą sobie równe.

4. *Odpowiedź.* Nie jest to możliwe.

Pokolorujmy szachownicę tak, by w każdej kolumnie i każdym wierszu pola były na zmianę białe i czarne. Zauważmy, że w takim razie każdy pionek zmienił po przestawieniu miejsce na pole o przeciwnym kolorze, bo tylko takie były obok pola, na którym stał wcześniej. Czyli wszystkie pionki z białych pól stoją teraz na czarnych, a pionki z czarnych pól – na białych.

Stąd wniosek, że jeśli po wykonaniu ruchu na każdym polu stoi pionek, to pól białych jest tyle samo, co czarnych. Wszystkich pól szachownicy jest $2019 \cdot 2021 = 4080399$. Białych pól powinna być zatem połowa, czyli $\frac{4080399}{2}$. Ale ta liczba nie jest całkowita, więc jest to niemożliwe. W konsekwencji, nie można tak przesunąć pionków, by nadal każde pole było zapełnione.

5. *Odpowiedź.* Tą liczbą jest 9.

Tutaj niezmiennikiem będzie reszta z dzielenia przez 9 tej liczby. Zauważmy, że liczba 2020! jest podzielna przez 9. Z cechy podzielności przez 9 wynika, że suma cyfr liczby podzielnej przez 9 jest podzielna przez 9. W rezultacie po każdym kroku liczba zapisana na tablicy będzie podzielna przez 9.

Zauważamy, że są tylko dwie liczby jednocyfrowe, które są podzielne przez 9 – są to liczby 0 i 9. Jedyną liczbą całkowitą, której suma cyfr wynosi 0 jest 0, a więc liczba 0 nie pojawi się nigdy na tablicy. Wnioskujemy więc, że na końcu zostanie napisana liczba 9.

6. *Odpowiedź.* Jedyną możliwą ostatnią liczbą jest $2020! - 1$.

Łatwo sprawdzić, że zachodzi równość

$$ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1.$$

Niech $a_1, a_2, \ldots, a_k$ będą wyrazami rozważanego ciągu liczb po pewnej liczbie wykonanych operacji. Powyższa równość nasuwa nam pomysł, że niezmiennikiem może być iloczyn wszystkich zapisanych liczb powiększonych o 1

$$(a_1+1)(a_2+1) \cdot \ldots \cdot (a_k+1).$$

Rzeczywiście – przyjmijmy, że wykonujemy rozważaną operację na pewnych dwóch liczbach a_i, a_j z tego ciągu. Wówczas iloczyn pozostałych liczb się nie zmienia. Część iloczynu tych dwóch liczb przed operacją wynosił $(a_i+1)(a_j+1)$. Po operacji zastąpiono ten iloczyn jedną liczbą $a_ia_j+a_i+a_j$ – czyli do rozpatrywanego iloczynu n liczb powiększonych od 1 wnosi ona czynnik

$$a_ia_j+a_i+a_j+1=(a_i+1)(a_j+1).$$

W rezultacie, rozpatrywany niezmiennik pozostanie stały. Załóżmy, że po wykonaniu 2018 operacji na tablicy pozostanie liczba x. Korzystając z wprowadzonego niezmiennika, mamy, że

$$x+1=(1+1)(2+1)(3+1)\cdot\ldots\cdot(2019+1)=2020!.$$

Wobec tego możliwa wartość x jest dokładnie jedna – niezależnie od kolejności wykonywania operacji.

7. *Odpowiedź.* Nie można przełożyć kamieni na jedno pole.

Ponumerujmy wszystkie pola w kolejności wyznaczonej rzędami – tj. w pierwszym rzędzie są pola o numerach od 1 do 100, w drugim pola o numerach od 101 do 200, i tak dalej. Niezmiennikiem będzie, jak wykażemy, suma numerów pól, na których leżą kamienie.

Zauważamy, że przy takim ponumerowaniu, przełożenie dwóch kamieni nie zmienia sumy numerów pól, na których one leżą. Czyli suma numerów pól wszystkich kamieni jest stała.

Na początku wynosi ona

$$1+2+3+\ldots+10000=\frac{10000\cdot 10001}{2}.$$

Przypuśćmy nie wprost, że po pewnej liczbie operacji wszystkie kamienie znajdą się na tym samym polu. Policzmy numer tego pola. Kamieni jest 10000, więc jest on równy sumie wszystkich numerów pól podzielonej przez 10000 – czyli wynosi on

$$\frac{10000\cdot 10001}{2\cdot 10000}=\frac{10001}{2}.$$

Jednak liczba ta nie jest całkowita, czyli nie może być numerem pola. To prowadzi do sprzeczności. Wykazaliśmy zatem, że nie możemy przełożyć wszystkich kamieni na jedno pole.

8. *Odpowiedź.* Nie można otrzymać tego trójkąta.

Wykażemy, że pole trójkąta jest stałe, czyli nie zmienia się przy wykonywaniu operacji. Niech D, E, F będzie trójkątem uzyskanym z wyjściowego po pewnej liczbie przekształceń. Załóżmy bez straty ogólności, że odbijamy punkt D względem punktu E. Oznaczmy to odbicie jako D'. Wykażemy, że pole trójkąta DEF jest równe polu trójkąta $D'EF$.

Z definicji odbicia, punkty D, E, D' leżą na tej samej prostej k, ponadto odcinki DE i $D'E$ mają równe długości. Zauważmy, że te dwa trójkąty mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka F – jest to odcinek prostopadły do prostej k przechodzący przez punkt F. Oznaczmy jego długość jako h. Wobec tego pole trójkąta DEF jest równe $\frac{DE \cdot h}{2}$, a pole trójkąta $D'EF$ jest równe $\frac{D'E \cdot h}{2}$. Pola te są zatem równe.

Stąd wiemy, że pole trójkąta nie zmienia się podczas wykonywania tej operacji. Policzmy teraz pole początkowego i końcowego trójkąta. Łatwo sprawdzić, że pole początkowego trójkąta wynosi $\frac{1}{2}$, a końcowego 1 – czyli nie są one równe. Wobec tego nie można dojść za pomocą tej operacji z trójkąta $(0,0); (0,1); (1,0)$ do trójkąta $(0,0); (2,0); (0,1)$.

9. W tym rozwiązaniu półniezmiennikiem okaże się liczba takich granic, które dzielą państwa o różnych ustrojach.

Zastanówmy się, jak ta liczba się zmienia, gdy wybucha rewolucja. Jeśli rewolucja wybuchła w państwie A, które miało k sąsiadów, to znaczy, że więcej niż połowa sąsiadów A miała przeciwny ustrój. Załóżmy, że s sąsiadów miało przeciwny ustrój niż A. W takim razie $s > \frac{k}{2}$, czyli $2s > k$. Natomiast w momencie, gdy A zmieniło ustrój, zaczęło mieć $k - s$ sąsiadów o przeciwnym ustroju.

Wcześniej A tworzyło więc s granic między państwami o przeciwnych ustrojach, a teraz tworzy ich $k - s$. Zauważmy, że $s > k - s$, bo $2s > k$. Stąd po zmianie ustroju A tworzy mniej granic pomiędzy państwami o przeciwnych ustrojach, niż wcześniej.

Ponieważ ustrój zmienił się tylko w A, to żadne inne granice się nie zmieniły, czyli możemy powiedzieć, że łączna liczba granic dzielących państwa o przeciwnych ustrojach zmniejszyła się. Uzasadniliśmy zatem, że po każdej rewolucji ta liczba się zmniejsza.

Niech początkowa liczba granic dzielących państwa o przeciwnych ustrojach będzie równa K. Ponieważ przy każdej rewolucji ta liczba się zmniejsza o co najmniej jeden, to po $K+1$ krokach powinna być ona ujemna. Jednak liczba granic nie może być ujemna, więc w pewnym momencie rewolucje przestaną wybuchać, czyli wszystkie kraje staną się stabilne.

10. *Odpowiedź.* Nie jest to możliwe.

Zacznijmy od ponumerowania wszystkich wróbli według ich początkowej kolejności siedzenia, przypisując im liczby 1, 2, 3, ..., 2019. Kolejność, którą chcemy uzyskać na końcu to 2019, 2018, ..., 1. Jak się okaże, niezmiennikiem rozważanego procesu będzie liczba *odwróconych* par wróbli, przy czym parę wróbli o numerach a, b, $a < b$, nazywamy *odwrócona*, gdy a siedzi dalej niż b – czyli po prostu, gdy ptaki o numerach a i b siedzą w odwrotnej kolejności niż na początku. Rozważamy wszystkie możliwe pary, więc jeden wróbel może należeć do wielu takich par. Na początku liczba takich par wynosi 0.

Niech pewne dwa wróble o numerach k i l siedzą po pewnej liczbie takich zamian obok siebie. Zastanówmy się, jak zmieni się liczba takich par, gdy te wróble zamienią się miejscami. Zauważmy, że jedyną parą, która może stać się *odwrócona* lub przestać nią być jest para, która jest właśnie zamieniana kolejnością. Czyli rozważana liczba zmieni się o dokładnie 1 – zmniejszy się, jeśli ptaki o numerach k i l zmienią się tak, by być w takiej kolejności względem siebie jak na początku, a zwiększy się, gdy ptaki te zmienią się tak, by być względem siebie w odwrotnej kolejności niż na początku.

W rezultacie, po każdej sekundzie parzystość liczby odwróconych par się zmienia. Po parzystej liczbie sekund, liczba ta będzie zatem zawsze parzysta.

Policzmy teraz liczbę takich par w żądanej, odwrotnej kolejności. Zauważmy, że wtedy każda para wróbli byłaby w odwrotnej kolejności, niż na początku (tj. ten o większym numerze byłby zawsze wcześniej). Zatem gdyby możliwe było odwrócenie kolejności wróbli, liczba „odwróconych" par byłaby w rezultacie równa po prostu liczbie wszystkich par wróbli, czyli

$$\frac{2019 \cdot 2018}{2} = 2037171,$$

która to jest liczbą nieparzystą.

Wiemy jednak, że liczba odwróconych par po parzystej liczbie sekund będzie zawsze parzysta. Stąd wniosek, że nie można osiągnąć żądanej kolejności po parzystej liczbie sekund.

23 Kongruencje

1. Łatwo ręcznie sprawdzić, że każda z liczb $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ i 7^2 daje resztę 0, 1 lub 4 z dzielenia przez 8. Niech $r \in \{0,1,4\}$ będzie resztą z dzielenia liczby a^2 przez 8. Wówczas

$$a^2 - r \equiv 0 \pmod 8,$$

co kończy rozwiązanie zadania.

2. *Odpowiedź.* Ostatnia cyfra danej liczby to 7.

Ostatnia cyfra liczby w zapisie dziesiętnym jest resztą z dzielenia tej liczby przez 10. Zauważmy, że

$$2^5 = 32 \equiv 2 \pmod{10} \quad \text{oraz} \quad 3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Po pomnożeniu stron pierwszej kongruencji przez 2^{n-1} otrzymujemy wniosek, że $2^{n+4} \equiv 2^n \pmod{10}$ dla $n \geqslant 1$. Zatem

$$2^{100} \equiv 2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}.$$

Wiemy też, że

$$3^{100} = \left(3^4\right)^{25} \equiv 1^{25} \equiv 1 \pmod{10}.$$

Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy

$$2^{100} + 3^{100} \equiv 6 + 1 \equiv 7 \pmod{10}.$$

3. *Odpowiedź.* Liczby spełniające dane równanie nie istnieją.

Skoro liczby $x^2 - 3y^2$ oraz 1001 są sobie równe, to w szczególności dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Możemy więc kolejno zapisać

$$\begin{aligned} x^2 - 3y^2 &\equiv 1001 \pmod 3, \\ x^2 - 0y^2 &\equiv 2 \pmod 3, \\ x^2 &\equiv 2 \pmod 3. \end{aligned}$$

Ostatnia kongruencja przeczy tezie Przykładu 1 ze skryptu, co dowodzi, że szukane liczby nie istnieją.

4. Oznaczmy wspólny dzielnik liczb $a-1$, $b-1$ i $c-1$ jako d. Możemy wówczas zapisać, że

$$a \equiv 1 \pmod d, \quad b \equiv 1 \pmod d, \quad c \equiv 1 \pmod d.$$

Uzyskujemy

$$abc \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod d,$$

skąd otrzymujemy, że liczba $abc-1$ jest podzielna przez d.

Skoro liczba $a-1$ jest dodatnia i podzielna przez d, to jest nie mniejsza od d. Pozostaje zauważyć, że skoro $a, b, c > 1$, to

$$abc - 1 > a - 1 \geqslant d.$$

Liczba $abc-1$ jest podzielna przez d i większa od d, a więc jest liczbą złożoną.

5. Zauważmy, że

$$n - 2 \equiv -2 \pmod n.$$

Łącząc to spostrzeżenie z faktem, że k jest liczbą nieparzystą, otrzymujemy

$$2^k + (n-2)^k \equiv 2^k + (-2)^k \equiv 2^k + (-1)^k 2^k \equiv 2^k - 2^k \equiv 0 \pmod n,$$

czego należało dowieść.

6. *Odpowiedź.* Jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest 1.

Zauważmy, że dla $n = 1$ rozważane liczby są równe odpowiednio: 3 i 5, a więc są liczbami pierwszymi.

Wykażemy, że zawsze jedna z rozpatrywanych liczb jest podzielna przez 3. Rozpatrzmy trzy przypadki.

1. $n \equiv 0 \pmod 3$. Wówczas $n^2 + n + 3 \equiv 0^2 + 0 + 3 \equiv 0 \pmod 3$.
2. $n \equiv 1 \pmod 3$. Wtedy $n^2 + n + 1 \equiv 1^2 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$.
3. $n \equiv 2 \pmod 3$. Zatem $n^2 + n + 3 \equiv 2^2 + 2 + 3 \equiv 0 \pmod 3$.

Gdy $n > 1$, to

$$n^2 + n + 3 > n^2 + n + 1 > 3,$$

więc jedna z rozpatrywanych liczb jest większa od 3 i jest podzielna przez 3 – czyli jest liczbą złożoną.

7. Postępując podobnie jak w Przykładzie 1, możemy wykazać, że kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4. Odnotujmy też, że dla $k=0$ równanie nie ma rozwiązań.

Przypuśćmy, że szukane liczby istnieją i weźmy taką trójkę (a,b,k), dla której liczba k jest najmniejsza. Gdyby istniała więcej niż jedna taka trójka, to weźmy dowolną z nich. Na mocy wcześniejszego wniosku wiemy, że $k \geqslant 1$. Załóżmy, że jedna z liczb a, b jest nieparzysta – bez straty ogólności niech to będzie a. Wówczas

$$a^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

skąd

$$b^2 = 4^k - a^2 \equiv 0 - 1 \equiv 3 \pmod 4,$$

co jest sprzeczne z faktem, że kwadrat liczby całkowitej daje resztę 0 lub 1 z dzielenia przez 4.

Wiemy więc, że liczby a, b są parzyste. Przyjmijmy $a = 2a_0$ oraz $b = 2b_0$. Wtedy

$$4^k = a^2 + b^2 = 4a_0^2 + 4b_0^2, \quad \text{czyli} \quad 4^{k-1} = a_0^2 + b_0^2.$$

Widzimy, że dane równanie ma rozwiązanie $(a_0, b_0, k-1)$. Przeczy to jednak założonej minimalności k i kończy rozwiązanie zadania.

8. Załóżmy, że pewna liczba a_t jest podzielne przez pewną liczbę całkowitą $n > 1$. Zapiszemy to jako $a_t \equiv 0 \pmod n$. Wówczas

$$a_{t+1} = a_t^2 - a_t + 1 \equiv 0^2 - 0 + 1 \equiv 1 \pmod n.$$

Rozpatrzmy dalej przypadek, gdy $a_s \equiv 1 \pmod n$, dla pewnego s. Wtedy

$$a_{s+1} = a_s^2 - a_s + 1 \equiv 1^2 - 1 + 1 \equiv 1 \pmod n.$$

Łącząc powyższe wnioski, otrzymujemy, że jeśli pewne a_t dzieli się przez n, to każda następna liczba w tym ciągu – to jest $a_{t+1}, a_{t+2}, \ldots$ – daje resztę 1 z dzielenia przez n. Przypuśćmy teraz nie wprost, że dla pewnych t_1 i t_2 (przy czym $t_2 > t_1$) liczby a_{t_1} oraz a_{t_2} są podzielne przez n. Jednakże skoro $t_2 > t_1$, to na mocy wcześniej udowodnionego faktu wiemy, że a_{t_2} daje resztę 1 przy dzieleniu przez n. Doszliśmy do sprzeczności, która kończy dowód nie wprost.

9. Zapisując dane w zadaniu podzielności za pomocą kongruencji, otrzymujemy

$$a^3 \equiv -2b^3 \pmod{p}, \quad c^5 \equiv -2d^5 \pmod{5}.$$

Podnosząc strony tych zależności odpowiednio do piątej i szóstej potęgi, otrzymujemy

$$a^{15} \equiv -2^5 b^{15} \pmod{p}, \quad c^{30} \equiv 2^6 d^{30} \pmod{p}.$$

Mamy więc

$$-2^5 b^{15} c^{30} \equiv 2^6 a^{15} d^{30} \pmod{p},$$

czyli

$$(bc^2)^{15} \equiv -2(ad^2)^{15} \pmod{p}.$$

Zatem liczba $(bc^2)^{15} + 2(ad^2)^{15}$ jest podzielna przez p, skąd bezpośrednio wynika teza.

10. *Odpowiedź.* Jedynymi rozwiązaniami danego równania są pary $(n,m) = (1,1)$ i $(3,3)$.

Zauważmy, że dla $n \geqslant 5$, liczba $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ jest podzielna zarówno przez 2 jak i przez 5. Wynika stąd, że liczba ta jest podzielna także przez 10. A więc dla $n \geqslant 5$ mamy

$$1! + 2! + \cdots + n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Pozostaje zauważyć, że dla każdego m liczba m^2 nie daje reszty 3 z dzielenia przez 10. Wystarczy w tym celu rozpatrzyć odpowiednie przypadki, tak jak w Przykładzie 1 ze skryptu. Wnioskujemy stąd, że dla $n \geqslant 5$ równanie nie ma rozwiązań.

Sprawdzając $n = 1,2,3,4$, wnioskujemy, że pary $(n,m) = (1,1)$, $(3,3)$ są jedynymi rozwiązaniami danego równania.

Co dalej?

Mamy nadzieję, że praca z książką była przyjemna i owocna. Chcielibyśmy dać Ci kilka porad i pokazać kilka ciekawych źródeł, dzięki którym będziesz mógł/mogła rozwijać się dalej.

Na stronach Olimpiady Matematycznej – *om.sem.edu.pl* – oraz Olimpiady Matematycznej Juniorów – *omj.edu.pl* – zamieszczone są zadania z minionych zawodów. Nieco trudniejsze będą zadania z obozów naukowych organizowanych przez każdą z olimpiad. Są one również dostępne na wyżej wymienionych stronach.

Zadania z olimpiad matematycznych z innych krajów znajdziesz choćby na stronie *artofproblemsolving.com/community* (w języku angielskim).

Oczywiście jest wiele publikacji, które mogą się przydać w przygotowaniach. Są to na przykład:

- Gazetka Olimpiady Matematycznej Juniorów *Kwadrat* (dostępna na stronie *omj.edu.pl*),
- Seria książek *Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej*,
- Seria *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata* autorstwa Henryka Pawłowskiego,
- Seria *Matematyka Olimpijska* autorstwa Adama Neugebauera i Beaty Bogdańskiej.