Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ

Wersja wstępna — zadania

2–8 czerwca 2024 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) przeprowadzono w dniach 2-8 czerwca 2024 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5-7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XIX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W czwartek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w piątek przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Antoni Czapkowski, Zuzanna Czubińska, Wiktor Gatner, Antoni Glinka, Nina Teresa Głowacka, Marcin Jerzy Jaźwiński, Anna Teresa Jeżo, Karol Kaczmarek, Wojciech Klich, Aleksandra Ławniczak, Tomasz Miłkowski, Patryk Niewczas, Filip Tomasz Osiński, Dominik Puzio, Adam Jakub Rowiński, Piotr Słabicki, Michał Szczurek, Michał Paweł Waleron, Weronika Wilczek, Krzysztof Tomasz Witkowski.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	10	3	1	6
2.	13	2	1	4
3.	1	2	4	13
4.	0	0	0	20
5.	0	0	5	15
6.	18	0	0	2
7.	4	1	5	10
8.	0	0	0	20
9.	2	2	2	14
10.	6	0	2	12
11.	19	0	1	0
12.	12	1	0	7
13.	9	2	2	7
14.	2	0	4	14
15.	3	1	0	16
16.	5	5	1	9
17.	5	1	1	13
18.	3	0	3	14
19.	1	5	2	12
20.	2	0	1	17

Treści zadań

Zadanie 1.

Znajdź wszystkie liczby sześciocyfrowe postaci $\overline{aaabbb}$, które są kwadratami liczby całkowitej.

Zadanie 2.

Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą całkowitą. Wykaż, że w zbiorze dowolnych n parami różnych liczb rzeczywistych można wskazać takie trzy liczby, że ich suma jest liczbą dodatnią lub takie dwie liczby, że ich suma jest liczbą ujemną.

Zadanie 3.

Wierzchołki n-kąta foremnego ponumerowano w pewnej kolejności liczbami od 1 do n. Wiadomo przy tym, że istnieje dodatnia liczba całkowita m taka, że pomiędzy każdymi dwoma wierzchołkami o kolejnych numerach jest dokładnie m innych wierzchołków. Znajdź wartość n wiedząc, że pewne trzy kolejne wierzchołki wielokąta ponumerowano kolejno liczbami $11, 4, 17$.

Zadanie 4.

Dwusieczne trójkąta ABC przecinają się w punkcie I. Proste AC i BC odbito odpowiednio względem dwusiecznych BI i AI, a uzyskane w ten sposób proste przecięły się w punkcie X. Wykaż, że proste AB oraz XI są prostopadłe.

Zadanie 5.

Jacek napisał na tablicy wszystkie dodatnie dzielniki pewnej dodatniej liczby całkowitej n, po czym obliczył ich iloczyn. Placek zrobił to samo z pewną inną liczbą całkowitą dodatnią m. Wykaż, że uzyskali różne wyniki.

Zadanie 6.

Prostokąty $ABCD$ i $BEFG$, oba o polu 10, ułożone są w taki sposób, że punkt C leży na odcinku GB. Znajdź pole czworokąta $AFGD$.

Zadanie 7.

W galerii wisi sto obrazów — każdy namalowany przy użyciu dokładnie k kolorów, przy czym żaden kolor nie jest obecny na wszystkich stu obrazach. Okazuje się że niezależnie jak wybierzemy trzy obrazy, pewien kolor widnieje na wszystkich trzech. Jaka jest najmniejsza dodatnia liczba całkowita k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Zadanie 8.

W trójkącie ABC punkt P leży na boku AB w taki sposób, że okręgi wpisane w trójkąty APC i PBC mają równe promienie. Niech dwusieczne kątów ACP i PCB przecinają AB odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $XP = PY$.

Zadanie 9.

Wykaż, że istnieje dziesięć parami różnych dodatnich liczb całkowitych takich, że dla dowolnych dwóch z nich, powiedzmy n i m, zachodzi $n \nmid m$ oraz $n | m^2$, to znaczy: jedna z liczb nie jest dzielnikiem drugiej, ale jest dzielnikiem jej kwadratu.

Zadanie 10.

Na szachownicy o wymiarach 15×15 stoi 15 skoczków (koni) szachowych, po jednym w każdym rzędzie i w każdej kolumnie. W pewnym momencie każdy skoczek wykonuje jeden ruch. Czy jest możliwe, że w rezultacie nadal w każdym rzędzie i w każdej kolumnie stoi dokładnie jeden skoczek?

Zadanie 11.

Wyznacz wszystkie trójki liczb całkowitych (a, b, c) takich, że

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{oraz} \quad (a+1)^2 + (b+1)^2 = (c+1)^2.$$

Zadanie 12.

Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC równoległoboku $ABCD$. Odcinki DM i DN przecinają odcinek AC odpowiednio w punktach X i Y. Wykaż, że $AX = XY = YC$.

Zadanie 13.

Niech $a \neq b$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich całkowitych n, dla których $\mathrm{NWD}(a + n, b + n) = 1$.

Zadanie 14.

W pewnej klasie jest n osób i wiadomo, że każda osoba ma w tej klasie co najmniej 2024 znajomych. Udowodnij, że można podzielić całą klasę na dwie drużyny tak, aby każda osoba miała w drużynie przeciwnej co najmniej 1012 znajomych.

Zadanie 15.

Wykaż, że dla dowolnej liczby całkowitej $n \geqslant 6$ można znaleźć (niekoniecznie różne) dodatnie liczby całkowite $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniające

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} = 1.$$

Zadanie 16.

Znajdź wszystkie trójki (a, b, c) liczb całkowitych spełniające układ równań

$$\begin{cases} a + bc = 6 \\ b + ca = 6 \\ c + ab = 6 \end{cases}$$

Zadanie 17.

Na płaszczyźnie narysowano 6 kół przecinających się w pewnym punkcie P. Wykaż, że środek pewnego z tych kół leży wewnątrz lub na brzegu innego z tych kół.

Zadanie 18.

Punkt M jest środkiem boku AD równoległoboku $ABCD$. Niech punkt F będzie spodkiem wysokości trójkąta BCM poprowadzonej z punktu B na prostą CM. Wykaż, że trójkąt AFB jest równoramienny.

Zadanie 19.

Dana jest dodatnia liczba rzeczywista a. Dla jakich trójek dodatnich liczb całkowitych (r, s, t) o sumie 2024 wartość

$$a^r + a^s + a^t$$

jest możliwie największa?

Zadanie 20.

Dany jest równoległobok $ABCD$, którego środkiem (tzn. punktem przecięcia przekątnych) jest punkt O. Niech P będzie wybranym punktem na płaszczyźnie. Oznaczmy przez M, N środki odcinków AP, BP i przyjmijmy że odcinki MC i ND przecinają się w pewnym punkcie Q. Wykaż, że punkty O, P i Q są współliniowe.

Mecz matematyczny

Zadanie 21.

Rozstrzygnij, czy kwadrat liczby całkowitej może być równy sumie kwadratów dwóch liczb pierwszych?

Zadanie 22.

Ustalmy liczbę całkowitą $n > 1$ i rozważmy liczbę, której zapis dziesiętny składa się ze złączonych kolejno zapisów dziesiętnych wszystkich liczb całkowitych od 1 do n. Czy możliwe jest, że ta rozważana liczba jest palindromem?

Zadanie 23.

Liczby naturalne od 1 do $2k$ podzielono na dwa rozłączne podzbiory k-elementowe tak, że dowolne dwie liczby z tego samego podzbioru mają nie więcej niż dwa różne wspólne dzielniki pierwsze. Jaka jest największa możliwa liczba k, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Zadanie 24.

Klockiem nazywamy figurę powstałą po usunięciu jednego pola z kwadratu 2×2. Układamy pewną niezerową liczbę klocków w prostokącie o wymiarach 5×7 tak, by każdy zajmował pewne trzy pola prostokąta. Klocki mogą nachodzić na siebie nawzajem. Czy możemy w ten sposób sprawić, aby na każdym z pól prostokąta leżała taka sama liczba klocków?

Zadanie 25.

Operacją na wielokącie na płaszczyźnie nazwiemy wybranie dowolnej prostej przecinającej jego obwód w dokładnie dwóch punktach A i B, a następnie odbicie względem symetralnej odcinka AB jednej z dwóch części, na które wielokąt został przecięty. Udowodnij, że żadnym ciągiem operacji nie można zamienić kwadratu w trójkąt.

Zadanie 26.

Dla każdej liczby całkowitej od 100 do 1000 obliczono iloczyn jej cyfr. Następnie dodano uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 27.

Liczby rzeczywiste a, b, c są nieujemne i każda z nich jest mniejsza lub równa 2. Wykaż, że zachodzi nierówność

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant 2.$$

Zadanie 28.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (a, b) dla których

$$2a^4 + 1 = b^2.$$

Zadanie 29.

Na płaszczyźnie narysowano cztery punkty w taki sposób, że po zmazaniu dowolnego z nich figura złożona z pozostałych trzech punktów jest osiowosymetryczna. Czy wynika stąd, że figura złożona ze wszystkich czterech punktów ma oś symetrii?

Zadanie 30.

Punkt D leżący w trójkącie ABC spełnia $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Zadanie 31.

Punkt M jest środkiem boku BC w trójkącie ABC. Oznaczmy przez I i J środki okręgów wpisanych w trójkąty AMB i AMC. Okręgi opisane na trójkątach ABI i ACJ przecinają się w punktach A i X. Wykaż, że punkt X leży na prostej AM.

Zadanie 32.

W trójkącie ostrokątnym ABC boki AC i BC są równej długości. Punkt D leżący wewnątrz trójkąta ABC spełnia

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 30^\circ.$$

Wykaż, że dwusieczne kątów ABC i ADC przecinają się na odcinku AC.