Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów — poziom OMJ

Olimpiada Matematyczna Juniorów

www.omj.edu.pl

1–7 czerwca 2025 r.

Skład komputerowy: Jadwiga Czyżewska, Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Arkadiusz Męcel, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OMJ) przeprowadzono w dniach 1–7 czerwca 2025 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik" w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 5–7 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek przed południem przeprowadzony został konkurs Náboj. W trakcie obozu chętni uczestnicy wzięli udział w Konkursie St@ś oraz w III Mistrzostwach Polski w Geometrii Elementarnej (kat. Juniorów).

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej Juniorów — zwłaszcza w ramach treningu przed zawodami finałowymi, a także w przygotowaniach do rozpoczęcia przygody z Olimpiadą Matematyczną dla szkół ponadpodstawowych — podejmowanych jeszcze w trakcie lub bezpośrednio po zakończeniu nauki w szkole podstawowej.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie odnosi się przy tym do programu merytorycznego Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OMJ)

Mateusz Bąk, Jacek Furmańczyk, Ignacy Gałek, Franciszek Jastrzębski, Benedykt Kaczmarek, Mateusz Kaźmierczak, Adam Kapka, Michał Kołodziejczyk, Leonard Królczyk, Maksymilian Leśniak, Oleksandra Lysakova, Aleksandra Mazur, Paulo Moreno Joao, Grzegorz Motylewski, Adam Mroczkowski, Szymon Rynkiewicz, Krzysztof Rzońca, Mateusz Sobański, Łukasz Sulowski, Michał Zabrocki

Kadra: Jadwiga Czyżewska, Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Piotr Kuc, Arkadiusz Męcel, Urszula Pastwa, Witold Sikora

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	13	1	4	2
2.	12	3	1	4
3.	12	4	3	1
4.	13	0	0	7
5.	1	5	4	10
6.	10	0	0	10
7.	3	0	4	13
8.	10	1	2	7
9.	9	2	3	6
10.	2	0	2	16
11.	4	3	6	7
12.	4	1	5	10
13.	11	1	3	5
14.	5	0	0	15
15.	2	2	0	16
16.	16	1	0	3
17.	14	1	1	4
18.	9	0	1	10
19.	1	0	1	18
20.	1	1	3	15

Treści zadań

Zadanie 1.

Na tablicy napisano trzy liczby trzycyfrowe o sumie równej 1000. Wszystkie użyte cyfry były różne. Jakiej cyfry nie użyto?

Zadanie 2.

W równoległoboku $ABCD$ prosta przechodząca przez punkt C przecina odcinki BD i AB odpowiednio w punktach E i F tak, że punkt F jest środkiem odcinka AB. Załóżmy, że pole trójkąta BEC jest równe 1. Wyznacz pole czworokąta $AFED$.

Zadanie 3.

Czy można pokolorować wszystkie dodatnie liczby całkowite na czerwono i niebiesko w taki sposób, by dla każdej liczby n liczby n i $2n$ były różnych kolorów?

Zadanie 4.

Dane jest 2025 prostokątów o wymiarach 1×1, $1 \times 2, 1 \times 3, \ldots, 1 \times 2024$, 1×2025. Czy można wybrać pewne z nich (co najmniej dwa) i ułożyć z nich kwadrat?

Zadanie 5.

Załóżmy, że dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzą równości

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{x+z}{y}.$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Zadanie 6.

Punkt X leży na okręgu ω o środku w punkcie O, a punkt $P \neq O$ leży wewnątrz tego okręgu. Prosta XP przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Y, a okrąg opisany na trójkącie XPO przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Z. Wykaż, że $PY = PZ$.

Zadanie 7.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y o niezerowej sumie spełniających

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10.$$

Zadanie 8.

W każde z dziewięciu pól kwadratu 3×3 wpisana jest liczba 0. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących pól i albo dodaniu do obu liczb w wybranych polach liczby 1, albo odjęciu od obu liczb w wybranych polach liczby 1. Czy po pewnej liczbie ruchów może się okazać, że w każde z dziewięciu pól wpisana jest liczba 2?

Zadanie 9.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych a, b większych od 1 spełniających warunki

$$b \mid a - 1 \qquad \text{oraz} \qquad 2a + 1 \mid 5b - 3.$$

Zadanie 10.

Mówimy, że ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zawiera *arytmetyczną trójkę*, jeśli dla pewnych liczb $k < l < m$ spełniony jest warunek $a_k + a_m = 2a_l$. Wykaż, że liczby $1, 2, \ldots, n$ można ustawić w taki ciąg, który nie zawiera żadnych arytmetycznych trójek.

Zadanie 11.

Na n kartkach napisano liczby całkowite od 1 do n. Następnie jedną z kartek wyrzucono. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których średnia arytmetyczna liczb zapisanych na pozostałych $n - 1$ kartkach mogła wynieść $\frac{555}{11}$.

Zadanie 12.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 60°. Przez D oznaczmy spodek dwusiecznej kąta BAC poprowadzonej z punktu A na bok BC, a przez E oznaczmy spodek dwusiecznej kąta ABC poprowadzonej z punktu B na bok AC. Wykaż, że punkt przecięcia prostych AD i BE leży na symetralnej odcinka DE.

Zadanie 13.

W pewnej klasie jest 24 uczniów. Każdy podzbiór uczniów tej klasy złożony z trzech osób spotyka się i daje prezent jednemu z pozostałych 21 uczniów tej klasy. Wykaż, że pewien uczeń z tej klasy dostał prezenty od co najmniej 10 różnych osób.

Zadanie 14.

Trójkąt ABC nazwiemy *podzielnym*, jeśli można rozciąć go na pięć trójkątów podobnych do ABC. Wykaż, że istnieje trójkąt podzielny, który nie jest prostokątny.

Zadanie 15.

Powiemy, że para liczb całkowitych (a, b) jest *kwadratowa*, jeśli liczba $ab + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Jaś ma liczby $1, 2, \ldots, 2n$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Chce on podzielić je na n kwadratowych par. Wykaż, że może to zrobić dla dowolnej parzystej liczby n, a nie może — dla dowolnej nieparzystej liczby n.

Zadanie 16.

Na tablicy napisano 10 kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że w tym celu każdej z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ użyto tyle samo razy?

Zadanie 17.

Dodatnie liczby całkowite a, b spełniają równość

$$\mathrm{NWD}(a, b) + \mathrm{NWW}(a, b) = a + b.$$

Wykaż, że jedna z liczb a, b dzieli drugą.

Zadanie 18.

Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach APD i BPC przecinają podstawę AB po raz drugi odpowiednio w punktach X i Y. Niech M będzie środkiem odcinka XY. Wykaż, że $MC = MD$.

Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 1000 punktów dzielących go na 1000 łuków — każdy o długości 1. Staś wybiera 501 łuków okręgu o końcach w zaznaczonych punktach — po jednym łuku o każdej z długości $1, 2, \ldots, 501$. Wykaż, że jeden z wybranych przez Stasia łuków zawiera się w innym wybranym łuku.

Zadanie 20.

Niech a, b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których liczba $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$ również są wymierne.

Rozwiązania zadań

Zadanie 1.

Na tablicy napisano trzy liczby trzycyfrowe o sumie równej 1000. Wszystkie użyte cyfry były różne. Jakiej cyfry nie użyto?

Rozwiązanie: Zapiszmy rozważane trzy liczby w postaci $\overline{a_1a_2a_3}, \overline{a_4a_5a_6}, \overline{a_7a_8a_9}$, gdzie $a_1, \ldots, a_9$ są różnymi cyframi. Dla dowolnej liczby trzycyfrowej $\overline{xyz}$ mamy

$$\overline{xyz} = 100x + 10y + z = 9(11x + y) + x + y + z.$$

Zatem przy dzieleniu przez 9 liczba $\overline{xyz}$ daje taką samą resztę, co liczba $x + y + z$. W szczególności suma liczb $\overline{a_1a_2a_3}, \overline{a_4a_5a_6}, \overline{a_7a_8a_9}$, równa 1000, daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, co liczba $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9)$.

Jeśli zatem przez k oznaczymy niewykorzystaną cyfrę, uzyskujemy, że liczba $1000+k$ daje przy dzieleniu przez 9 taką samą resztę, co liczba $a_1 + \ldots + a_9 + k$, która to liczba jest równa $0 + 1 + \ldots + 9 = 45$. Zatem liczba $1000 + k$ jest podzielna przez 9 i w konsekwencji liczba $k + 1$ jest podzielna przez 9. Jedyną cyfrą k spełniającą taką podzielność jest 8. Jest to zatem niewykorzystana cyfra.

Zadanie 2.

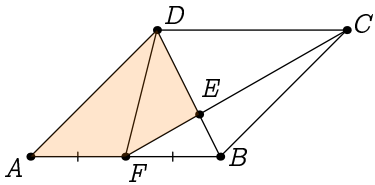
W równoległoboku $ABCD$ prosta przechodząca przez punkt C przecina odcinki BD i AB odpowiednio w punktach E i F tak, że punkt F jest środkiem odcinka AB. Załóżmy, że pole trójkąta BEC jest równe 1. Wyznacz pole czworokąta $AFED$.

Rozwiązanie: Proste FB i CD są równoległe. Z twierdzenia Talesa otrzymujemy

$$\frac{DE}{EB} = \frac{CE}{EF} = \frac{DC}{FB} = 2.$$

Zatem pola trójkątów FED i BEC są dwa razy większe od pola trójkąta BEF. Czyli $[BEF] = \frac{1}{2}$ i $[BFD] = \frac{3}{2}$.

Trójkąty AFD i BFD mają wspólną wysokość i równe podstawy AF i BF, więc $[AFD] = [BFD] = \frac{3}{2}$. Ostatecznie $[AFED] = [AFD] + [FED] = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$.



Zadanie 3.

Czy można pokolorować wszystkie dodatnie liczby całkowite na czerwono i niebiesko w taki sposób, by dla każdej liczby n liczby n i $2n$ były różnych kolorów?

Rozwiązanie: Każdą całkowitą liczbę dodatnią n można przedstawić na dokładnie jeden sposób w postaci $2^a \cdot m$, gdzie m jest dodatnią liczbą nieparzystą, a $a \geqslant 0$ jest liczbą całkowitą. Jeśli otrzymana w ten sposób liczba a jest nieparzysta, pokolorujmy liczbę n na niebiesko, a jeśli liczba a jest parzysta, pokolorujmy n na czerwono.

W ten sposób dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej n liczby $n = 2^a \cdot m$ oraz $2n = 2^{a+1} \cdot m$ mają różne kolory, ponieważ liczby a i $a+1$ są różnej parzystości.

Zadanie 4.

Dane jest 2025 prostokątów o wymiarach 1×1, $1 \times 2, 1 \times 3, \ldots, 1 \times 2024$, 1×2025. Czy można wybrać pewne z nich (co najmniej dwa) i ułożyć z nich kwadrat?

Rozwiązanie: Załóżmy nie wprost, że z pewnej liczby wskazanych w treści zadania prostokątów można ułożyć kwadrat o boku n. Skoro trzeba użyć co najmniej dwóch prostokątów, to $n > 1$. Nietrudno uzasadnić, że wszystkie boki użytych prostokątów muszą być równoległe do boku ułożonego kwadratu.

Zauważmy, że nie mogły zostać użyte prostokąty $1 \times a$, dla $a > n$, ponieważ prostokąty te nie mieszczą się w kwadracie $n \times n$. Zatem mogliśmy użyć tylko prostokątów spośród $1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times n$. W takim razie pole ułożonej figury musi być mniejsze od n^2, co wynika z rachunku

$$1 + 2 + \ldots + n < n + n + \ldots + n = n^2.$$

Jednakże założyliśmy, że z prostokątów ułożono kwadrat o boku n, czyli o polu n^2. Uzyskana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 5.

Załóżmy, że dla pewnych niezerowych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzą równości

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{x+z}{y}.$$

Znajdź wszystkie możliwe wartości liczby

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Rozwiązanie: Oznaczmy przez k wspólną wartość ułamków z treści zadania. Chcemy znaleźć wszystkie możliwe wartości k^3. Wystarczy więc znaleźć wszystkie możliwe wartości liczby k. Dodając do każdego z ułamków równych k liczbę 1, uzyskujemy

$$k+1=\frac{x+y+z}{x}=\frac{x+y+z}{y}=\frac{x+y+z}{z}.$$

Zatem albo $x+y+z=0$ i wtedy uzyskujemy $k=-1$, albo po podzieleniu stron powyższych równości przez $x+y+z$ dostajemy

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z},$$

czyli $x=y=z$. Wtedy otrzymujemy $k=2$.

Obie uzyskane wartości k są osiągalne, choćby dla trójek (x,y,z) równych $(1,1,-2)$ i $(1,1,1)$. Zatem możliwe wartości k^3 równe są -1 oraz 8.

Zadanie 6.

Punkt X leży na okręgu ω o środku w punkcie O, a punkt $P \neq O$ leży wewnątrz tego okręgu. Prosta XP przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Y, a okrąg opisany na trójkącie XPO przecina okrąg ω po raz drugi w punkcie Z. Wykaż, że $PY=PZ$.

Rozwiązanie: Wystarczy wykazać, że $\sphericalangle PYZ = \sphericalangle PZY$. Korzystając z twierdzenia o kącie środkowym i kącie wpisanym dla okręgu ω dostajemy

$$\sphericalangle XOZ = 2\cdot\sphericalangle XYZ = 2\cdot\sphericalangle PYZ.$$

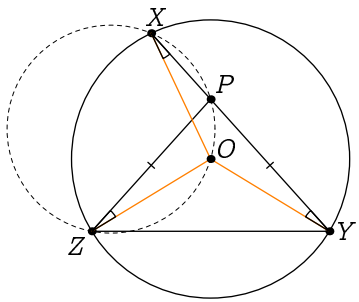
Z drugiej strony, z twierdzenia o kątach wpisanych mamy

$$\sphericalangle XPZ = \sphericalangle XOZ.$$

Łącząc powyższe równości i z sumy miar kątów w trójkącie PYZ dostajemy

$$\sphericalangle PZY = 180^\circ - \sphericalangle PYZ - (180^\circ - 2\cdot\sphericalangle PYZ) = \sphericalangle PYZ.$$

Uzyskana równość kończy dowód.



Zadanie 7.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych x, y o niezerowej sumie spełniających

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 10.$$

Rozwiązanie: Mnożąc strony równania przez $x+y$ dostajemy

$$x^2+y^2 = 10(x+y),$$

co możemy zapisać jako

$$(x-5)^2+(y-5)^2 = 50.$$

Sprawdzamy, że jedyne pary kwadratów liczb całkowitych o sumie 50 to $(1,49),(5,5)$ i $(49,1)$. Zatem wszystkie pary (x,y) spełniające wyjściowe równanie są postaci $(5+a,5+b)$, gdzie (a,b) jest jedną z par $(\pm1,\pm7),(\pm5,\pm5),(\pm7,\pm1)$.

Wykluczamy parę $(x,y)=(0,0)$, jako że z założenia suma $x+y$ jest niezerowa. Otrzymujemy zatem rozwiązania

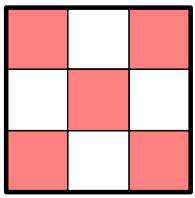
$$(6,12),(4,12),(6,-2),(4,-2),(10,10),(10,0),(0,10),(-2,4),(-2,6),(12,4),(12,6).$$

W każdej z tych par suma elementów jest niezerowa, i wyjściowa równość istotnie zachodzi. Zatem są to wszystkie rozwiązania.

Zadanie 8.

W każde z dziewięciu pól kwadratu 3×3 wpisana jest liczba 0. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących pól i albo dodaniu do obu liczb w wybranych polach liczby 1, albo odjęciu od obu liczb w wybranych polach liczby 1. Czy po pewnej liczbie ruchów może się okazać, że w każde z dziewięciu pól wpisana jest liczba 2?

Rozwiązanie: Pokolorujmy pola tablicy w szachownicę, jak na rysunku poniżej.



Na początku suma liczb w białych polach jest równa sumie liczb w czerwonych polach. Zauważmy, że wśród każdej pary sąsiadujących pól jest jedno pole białe i jedno czerwone, więc obie wspomniane sumy zwiększają się o jeden albo obie zmniejszają się o jeden. Zatem w każdym ruchu zmieniają się o tę samą wartość, więc zawsze będą sobie równe.

Ale gdy w każde pole wpisana jest liczba 2, suma liczb na białych polach to 10, a suma liczb na czerwonych polach to 8. Sumy te są różne, więc nie można dojść do tej pozycji ciągiem ruchów.

Zadanie 9.

Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych a, b większych od 1 spełniających warunki

$$b \mid a-1 \qquad \text{oraz} \qquad 2a+1 \mid 5b-3.$$

Rozwiązanie: Z podzielności podanej w zadaniu wiemy, że

$$a-1 = bk \qquad \text{i} \qquad 5b-3 = (2a+1)l,$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych k, l. Wtedy

$$5b-3 = (2a+1)l = (2(bk+1)+1)l = 2bkl+3l.$$

Przenosząc wyrazy zawierające b na lewą stronę, uzyskujemy

$$b(5-2kl) = 3(l+1).$$

Skoro $5b-3>0$ oraz $2a+1>0$, to $l>0$. Stąd także $5-2kl>0$, czyli $2kl<5$. Wynika stąd, że para (k,l) musi być jedną z par $(2,1),(1,2),(1,1)$.

W pierwszym przypadku uzyskana równość daje

$$5b-3 = 2bkl+3l = 4b+3,$$

czyli $b=6$. Podobnie uzyskujemy $a = bk+1 = 13$.

Pozostałe dwa przypadki rozpatrujemy analogicznie, dochodząc odpowiednio do par rozwiązań $(a,b) = (10,9)$ i $(a,b) = (3,2)$. Wszystkie trzy otrzymane pary $(13,6),(10,9)$ i $(3,2)$ istotnie spełniają założenia zadania.

Zadanie 10.

Mówimy, że ciąg liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zawiera *arytmetyczną trójkę*, jeśli dla pewnych liczb $k<l<m$ spełniony jest warunek $a_k + a_m = 2a_l$. Wykaż, że liczby $1,2,\ldots,n$ można ustawić w taki ciąg, który nie zawiera żadnych arytmetycznych trójek.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że jeśli teza jest spełniona dla pewnego n, to jest spełniona również dla wszystkich dodatnich liczb całkowitych $m<n$. Rzeczywiście, mając ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniający warunek zadania, możemy usunąć z niego wszystkie wyrazy większe od m i otrzymać ciąg spełniający warunek zadania dla m. Wystarczy więc wykazać, że teza jest spełniona dla liczb postaci $n = 2^s$.

Oczywiście jest to prawda dla $s = 1$. Przypuśćmy jednak, że istnieje $s > 1$, dla którego teza nie zachodzi i weźmy najmniejsze takie s. Zatem dla $n = 2^{s-1}$ teza jest spełniona i liczby od 1 do $n = 2^{s-1}$ możemy ułożyć w ciąg $a_1, \ldots, a_n$ bez trójek arytmetycznych. Zauważmy, że ciąg $2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_n - 1$ również nie zawiera żadnej trójki arytmetycznej. Istotnie, gdyby dla pewnych $k < l < m$ zachodziło

$$(2a_k - 1) + (2a_m - 1) = 2 \cdot (2a_l - 1),$$

to mielibyśmy również $a_k + a_m = 2a_l$. Podobnie uzasadniamy, że w ciągu $2a_1, \ldots, 2a_n$ nie ma trójek arytmetycznych. Wspomniane dwa ciągi jednak stanowią ciąg wszystkich liczb nieparzystych i wszystkich liczb parzystych z ciągu $1, 2, \ldots, 2n$. Zatem ciąg

$$2a_1 - 1, 2a_2 - 1, \ldots, 2a_n - 1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$$

zawiera każdą z liczb od 1 do $2n = 2^s$ dokładnie raz. Gdyby więc istniały w tym ciągu trójki arytmetyczne, to zaczynać by się musiały od liczby nieparzystej, a kończyłyby się na liczbie parzystej.

Zauważmy jednak, że jeśli warunek $x + z = 2y$ jest spełniony dla pewnych liczb całkowitych x, y, z, to liczby x i z muszą być tej samej parzystości. Zatem trójka arytmetyczna w rozważanym ciągu 2^s liczb musiałaby mieć pierwszy wyraz w bloku nieparzystym i trzeci w bloku parzystym, co jest niemożliwe, bo w trójce arytmetycznej skrajne wyrazy mają tę samą parzystość. Zatem przedstawiony ciąg 2^s liczb nie zawiera trójek arytmetycznych, co przeczy założeniu o liczbie s. Dowód jest zatem zakończony.

Zadanie 11.

Na n kartkach napisano liczby całkowite od 1 do n. Następnie jedną z kartek wyrzucono. Wyznacz wszystkie wartości n, dla których średnia arytmetyczna liczb zapisanych na pozostałych $n - 1$ kartkach mogła wynieść $\frac{555}{11}$.

Rozwiązanie: Najmniejsza możliwa średnia jest równa

$$\frac{1}{n-1} \cdot \big(1 + \ldots + (n-1)\big) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n}{2},$$

a największa możliwa średnia jest równa

$$\frac{1}{n-1} \cdot \big(2 + \ldots + n\big) = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{n+2}{2}.$$

Wnioskujemy stąd, że

$$\frac{n}{2} \leqslant \frac{555}{11} \leqslant \frac{n+2}{2}.$$

Otrzymujemy stąd $99 \leqslant n \leqslant 100$. Zatem liczba n może być równa 99 lub 100.

Zauważmy też, że skoro średnia liczb na pozostałych $n-1$ kartkach wyniosła $\frac{555}{11}$, to suma liczb na tych kartkach wyniosła $\frac{555}{11} \cdot (n-1)$, i musiała być to liczba całkowita.

Zatem liczba 11 dzieli $555(n-1)$. Skoro jednak liczba 11 jest względnie pierwsza z 555, to otrzymujemy $11 \mid n-1$. Tylko liczba $n = 100$ spełnia ten warunek. W takim przypadku usuwamy kartkę z liczbą 55 i sprawdzamy, że suma liczb $1, \ldots, 54, 56, \ldots, 100$ jest równa

$$\frac{101 \cdot 100}{2} - 55 = 4995 = 555 \cdot 9 = \frac{555}{11} \cdot 99.$$

Zadanie 12.

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C ma miarę 60°. Przez D oznaczmy spodek dwusiecznej kąta BAC poprowadzonej z punktu A na bok BC, a przez E oznaczmy spodek dwusiecznej kąta ABC poprowadzonej z punktu B na bok AC. Wykaż, że punkt przecięcia prostych AD i BE leży na symetralnej odcinka DE.

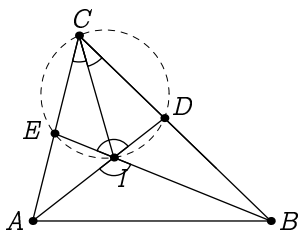
Rozwiązanie: Zachodzą równości

$$\begin{aligned}\sphericalangle AIB &= 180^\circ - \sphericalangle BAI - \sphericalangle ABI = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BAC - \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 120^\circ.\end{aligned}$$

Zatem

$$\sphericalangle EID + \sphericalangle ECD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

więc punkty E, I, D, C leżą na jednym okręgu.



Zatem $\sphericalangle EDI = \sphericalangle ECI = \sphericalangle DCI = \sphericalangle DEI$, więc rzeczywiście $EI = ID$.

Zadanie 13.

W pewnej klasie jest 24 uczniów. Każdy podzbiór uczniów tej klasy złożony z trzech osób spotyka się i daje prezent jednemu z pozostałych 21 uczniów tej klasy. Wykaż, że pewien uczeń z tej klasy dostał prezenty od co najmniej 10 różnych osób.

Rozwiązanie: Zauważmy najpierw, że prezentów łącznie rozdanych było tyle samo, co trzyelementowych podzbiorów zbioru uczniów, czyli $\binom{24}{3} = 2024$.

Przypuśćmy nie wprost, że każdy uczeń dostał prezenty od nie więcej niż 9 różnych osób. Każdy uczeń musiał zatem dostać nie więcej niż $\binom{9}{3} = 84$ prezentów. Skoro jednak uczniów jest 24, to łącznie prezentów rozdano nie więcej niż

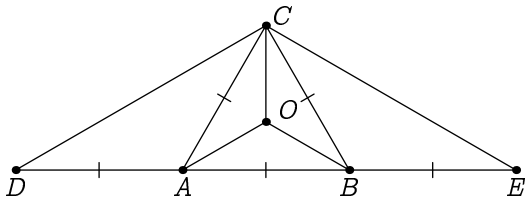
$$24 \cdot 84 = 2016 < 2024.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 14.

Trójkąt ABC nazwiemy *podzielnym*, jeśli można rozciąć go na pięć trójkątów podobnych do ABC. Wykaż, że istnieje trójkąt podzielny, który nie jest prostokątny.

Rozwiązanie: Niech ABC będzie trójkątem równobocznym o środku w punkcie O, a na prostej AB zaznaczmy punkty D i E w taki sposób, żeby $DA = AB = BE$.



Wtedy każdy z pięciu trójkątów DAC, AOC, BOC, AOB, BCE ma kąty o miarach $30°, 30°, 120°$, podobnie jak trójkąt DCE. Zatem trójkąt DCE spełnia warunek zadania.

Zadanie 15.

Powiemy, że para liczb całkowitych (a, b) jest *kwadratowa*, jeśli liczba $ab + 1$ jest kwadratem liczby całkowitej. Jaś ma liczby $1, 2, \ldots, 2n$, dla pewnej dodatniej liczby całkowitej n. Chce on podzielić je na n kwadratowych par. Wykaż, że może to zrobić dla dowolnej parzystej liczby n, a nie może — dla dowolnej nieparzystej liczby n.

Rozwiązanie: Załóżmy najpierw, że n jest liczbą parzystą. Zauważmy, że dwie liczby całkowite odległe o 2 tworzą parę kwadratową. Istotnie: $n(n+2)+1=(n+1)^2$. Możemy podzielić więc zbiór $1,\ldots,2n$ na czwórki kolejnych liczb naturalnych postaci

$$\{4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4\},$$

i każdą taką czwórkę podzielić na dwie pary kwadratowe postaci: $(4k+1, 4k+3)$ oraz $(4k+2, 4k+4)$. To kończy dowód w przypadku, gdy n jest liczbą parzystą.

Załóżmy teraz, że n jest liczbą nieparzystą. Zauważmy, że jeśli liczba a, dająca resztę 2 z dzielenia przez 4, tworzy z pewną inną liczbą b parę kwadratową, to liczba b musi być podzielna przez 4. Istotnie, w takim wypadku dla pewnej liczby naturalnej m zachodzi równość

$$ab = m^2 - 1 = (m-1)(m+1).$$

Skoro liczba po lewej stronie równości jest parzysta, to jako iloczyn dwóch kolejnych liczb parzystych jest ona podzielna przez 8, a skoro $4 \nmid a$ to $4 \mid b$.

Jednak przy założeniu, że liczba n jest nieparzysta możemy stwierdzić, że w zbiorze wszystkich liczb całkowitych od 1 do $2n$ podzbiór złożony z liczb dających resztę 2 z dzielenia przez 4 ma więcej elementów niż podzbiór złożony z liczb podzielnych przez 4. Skoro podzbiory te nie są równoliczne, to ich elementów nie możemy połączyć w pary. To kończy dowód.

Zadanie 16.

Na tablicy napisano 10 kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Czy możliwe jest, że w tym celu każdej z cyfr $0, 1, 2, \ldots, 9$ użyto tyle samo razy?

Rozwiązanie: Łatwo zweryfikować, że liczby

$$12345678900,\ 12345678901, \ldots,\ 12345678909$$

spełniają warunek zadania.

Zadanie 17.

Dodatnie liczby całkowite a, b spełniają równość

$$\mathrm{NWD}(a,b) + \mathrm{NWW}(a,b) = a + b.$$

Wykaż, że jedna z liczb a, b dzieli drugą.

Rozwiązanie: Sposób I: Załóżmy bez straty ogólności, że $a \geqslant b$. Gdyby $\mathrm{NWW}(a,b)$ było większe niż a, to jako wielokrotność a wyniosłoby co najmniej $2a$. Zatem wtedy mielibyśmy

$$a + b = \mathrm{NWD}(a,b) + \mathrm{NWW}(a,b) > 2a,$$

co przeczy założeniu $a \geqslant b$. Zatem otrzymujemy $\mathrm{NWW}(a,b) = a$, czyli $b \mid a$.

Sposób II: Możemy zapisać $a = dx$, $b = dy$ gdzie $d = \mathrm{NWD}(a,b)$. Korzystając ze znanej równości $a \cdot b = \mathrm{NWD}(a,b) \cdot \mathrm{NWW}(a,b)$ łatwo wtedy zauważyć, że $\mathrm{NWW}(a,b) = dxy$. Wstawiając tę wartość do danego równania otrzymujemy $d + dxy = dx + dy$, skąd po przekształceniach dostajemy $d(x-1)(y-1) = 0$. Zatem $x = 1$ lub $y = 1$. Stąd $a \mid b$ lub $b \mid a$.

Zadanie 18.

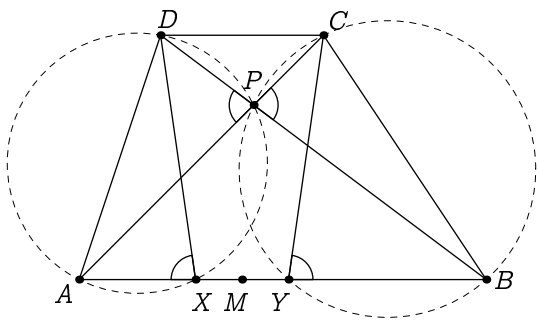
Przekątne AC i BD trapezu $ABCD$ przecinają się w punkcie P. Okręgi opisane na trójkątach APD i BPC przecinają podstawę AB po raz drugi odpowiednio w punktach X i Y. Niech M będzie środkiem odcinka XY. Wykaż, że $MC = MD$.

Rozwiązanie: Wykażemy najpierw, że czworokąt $XYCD$ jest trapezem równoramiennym. Korzystając z twierdzenia o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku, dostajemy równości

$$\sphericalangle AXD = \sphericalangle APD \qquad \text{oraz} \qquad \sphericalangle BYC = \sphericalangle BPC.$$

Z drugiej strony, kąty APD i BPC są wierzchołkowe, a zatem mają równą miarę. Wynika stąd, że kąty $\sphericalangle AXD$ i $\sphericalangle BYC$ także mają równą miarę. Ponieważ proste XY i CD są równoległe, czworokąt $XYCD$ jest rzeczywiście trapezem równoramiennym.

Teraz teza wynika bezpośrednio z faktu, że trapez równoramienny jest symetryczny względem symetralnej podstaw, a M leży na tej osi symetrii.



Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 1000 punktów dzielących go na 1000 łuków — każdy o długości 1. Staś wybiera 501 łuków okręgu o końcach w zaznaczonych punktach — po jednym łuku o każdej z długości $1, 2, \ldots, 501$. Wykaż, że jeden z wybranych przez Stasia łuków zawiera się w innym wybranym łuku.

Rozwiązanie: Łuk XY o długości m nazwijmy m-łukiem. Powiemy, że zaczyna się on w punkcie X, jeśli od punktu X przechodzimy do punktu Y poruszając się po okręgu zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Przypuśćmy przeciwnie, że żaden z wybranych przez Stasia łuków nie zawiera się w innym. Ponumerujmy liczbami naturalnymi zaznaczone punkty, poruszając się zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Nadajmy w szczególności etykietę 0 punktowi, w którym zaczyna się 501-łuk. Niech n będzie liczbą przypisaną punktowi, w którym zaczyna się 1-łuk. Łatwo zauważyć, że $n \geqslant 501$, ponieważ inaczej 1-łuk zawierałby się w 501-łuku.

Ze wskazanego ograniczenia wnioskujemy, że każdy łuk zaczynający się w punkcie ponumerowanym liczbą z przedziału $(0, n)$ musi się kończyć w punkcie z przedziału $[502, n]$, aby nie zawierał się w 501-łuku i nie zawierał 1-łuku.

Z drugiej strony, każde dwa łuki muszą kończyć się w dwóch różnych punktach, bo inaczej ten krótszy zawierałby się w dłuższym. Oznacza to, że łuków zaczynających się w punktach z przedziału $(0, n)$ jest co najwyżej $n - 501$. Analogicznie, każde dwa łuki muszą zaczynać się w dwóch różnych punktach, co daje nam nie więcej niż $1000 - n - 1$ łuków zaczynających się w punktach z przedziału $[n + 1, 999]$. Łącznie więc z 1-łukiem i 501-łukiem uzyskujemy

$$(n - 501) + (1000 - n - 1) + 2 = 500 < 501$$

możliwych łuków na okręgu. Uzyskaliśmy sprzeczność.

Zadanie 20.

Niech a, b będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, dla których liczba $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ jest wymierna. Wykaż, że liczby $\sqrt[3]{a}$ i $\sqrt[3]{b}$ również są wymierne.

Rozwiązanie: Oznaczmy $x = \sqrt[3]{a}$ i $y = \sqrt[3]{b}$. Wiemy zatem, że $x, y > 0$, oraz że wymierne są liczby x^3, y^3, $x + y$. Wymierna jest zatem również liczba

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3(x + y) \cdot xy.$$

Skoro liczba x^3+y^3 jest całkowita, a liczba $x+y$ jest z założenia wymierna i dodatnia, to także liczba xy musi być wymierna. Wnioskujemy stąd, że wymierna jest liczba

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

a zatem wymierne są także liczby x^2+y^2 oraz x^2+xy+y^2. Ostatnia liczba jest natomiast równa

$$\frac{x^3-y^3}{x-y},$$

pod warunkiem że $x \neq y$. Licznik powyższego ułamka jest liczbą całkowitą, więc mianownik musi być liczbą wymierną. Zatem liczby $x+y$ i $x-y$ są wymierne. Stąd także ich suma $2x = 2\sqrt[3]{a}$ i różnica $2y = 2\sqrt[3]{b}$ są wymierne. Stąd natychmiast wynika teza.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek $x = y$. Wtedy natomiast $x+y = 2x = 2y$ jest liczbą wymierną, więc teza jest oczywista.