Obóz Naukowy
Olimpiady Matematycznej
Juniorów — poziom OM

Wersja wstępna — zadania

9–16 czerwca 2024 r.

Skład komputerowy: Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Witold Sikora

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Juniorów
Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
www.omj.edu.pl

Wstęp

Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Juniorów (poziom OM) przeprowadzono w dniach 9-16 czerwca 2024 r. w Domu Rekolekcyjno-Konferencyjnym „Wieczernik” w Świętej Katarzynie (woj. świętokrzyskie). Do udziału w Obozie zakwalifikowano uczniów z klas 7-8 szkół podstawowych z najlepszymi wynikami w XIX OMJ.

Każdego dnia uczestnicy Obozu rozwiązywali zadania w formule konkursowej, pracując zarówno indywidualnie, jak i w grupach. Popołudnia poświęcone były na wykłady tematyczne i zajęcia warsztatowe. W piątek odbył się spacer do Świętokrzyskiego Parku Narodowego, a w sobotę przeprowadzony został mecz matematyczny.

W niniejszym opracowaniu zebrane są zadania konkursowe wraz z rozwiązaniami. Zachęcamy do wykorzystania tych materiałów zwłaszcza w przygotowaniach do startów w kolejnych edycjach Olimpiady Matematycznej dla szkół ponadpodstawowych.

Poziom trudności niektórych problemów zawartych w niniejszym opracowaniu zdecydowanie przewyższa poziom zawodów finałowych OMJ. Tematyka podejmowana na Obozie wykracza niekiedy ponad program merytoryczny Olimpiady, czerpiąc inspiracje z międzynarodowych zawodów matematycznych rozgrywanych na poziomie juniorskim oraz z zawodów pierwszego i drugiego stopnia Olimpiady Matematycznej.

Miłej lektury!

Kadra Obozu

Uczestnicy Obozu Naukowego OMJ (poziom OM)

Uczniowie: Baniel Bereza, Aleksander Dembny, Piotr Dybich, Marek Konieczny, Jan Kropidłowski, Krzysztof Kowalik, Maksymilian Kuś, Mateusz Łukaszewicz, Artur Smoleński, Szymon Michalik, Aleksander Rotkiewicz, Maria Reluga, Mikołaj Rosowski, Jan Sałkowski, Krzysztof Suligowski, Witold Swacha, Lili Teodorowicz, Piotr Wesołowski, Piotr Zalewski, Igor Żuk.

Kadra: Paweł Dziuba (kierownik), Bartosz Głowacki, Kosma Kasprzak, Antoni Łuczak, Arkadiusz Męcel, Miłosz Płatek, Witold Sikora.

Rozkład ocen za rozwiązania zadań indywidualnych

Prace uczestników Obozu oceniane były w skali olimpijskiej 0, 2, 5, 6. Trzy najwyższe uzyskane sumy punktów to , oraz . Rozkład ocen przyznanych za rozwiązania zadań przedstawiony jest w poniższej tabeli.

	6 p.	5 p.	2 p.	0 p.
1.	4	9	1	6
2.	3	0	2	15
3.	1	5	1	13
4.	8	0	2	10
5.	0	2	1	17
6.	0	0	0	20
7.	13	0	1	6
8.	2	4	2	12
9.	2	1	0	17
10.	0	3	1	16
11.	1	0	1	18
12.	14	3	0	3
13.	10	2	3	5
14.	3	2	3	12
15.	7	2	0	11
16.	1	1	1	17
17.	11	2	1	6
18.	9	0	3	8
19.	8	2	1	9
20.	0	0	0	20

Zadania 21-38 rozwiązywane były w ramach pracy grupowej.

Treści zadań

Zadanie 1.

Dana jest taka liczba rzeczywista x, że liczby x^3 oraz $x^2 + x$ są wymierne. Wykaż, że x jest liczbą wymierną.

Zadanie 2.

Czworokąt $ABCD$ niebędący trapezem jest wpisany w okrąg o środku w punkcie O. Jego przekątne są prostopadłe i przecinają się w punkcie P. Punkty M i N to środki odpowiednio boków AB i CD. Wykaż, że $MO = NP$.

Zadanie 3.

Dodatnią liczbę całkowitą n nazwiemy *fajną*, jeśli dla dowolnych jej dzielników a, b spełniających $1 < a < b < n$ różnica $b - a$ jest również dzielnikiem n. Znajdź wszystkie liczby fajne.

Zadanie 4.

Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Liczby $1, 2, \ldots, 2n$ zostały podzielone na dwa ciągi spełniające warunki

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n \quad \text{oraz} \quad b_1 > b_2 > \ldots > b_n.$$

Udowodnij, że liczba

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$$

jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 5.

Na tablicy napisane są liczby 20 i 24. Co minutę każda z liczb jest zwiększana o 1 albo podnoszona do kwadratu. Na przykład, po minucie na tablicy mogą być liczby 400 i 25. Czy jest możliwe, że w pewnym momencie liczby na tablicy będą równe?

Zadanie 6.

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach F, D, E. Oznaczmy środki okręgów wpisanych w trójkąty DEF, AEF, BDF odpowiednio przez I, S, T. Wykaż, że punkty I i F są symetryczne względem prostej ST.

Zadanie 7.

Asia i Basia grają w grę używając pudełka, w którym na początku jest n cukierków. Ruch polega na wyciągnięciu z pudełka dowolnej liczby cukierków i spełniającej warunki

$$\mathrm{NWD}(k, i) = 1 \qquad \text{i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

gdzie k oznacza liczbę cukierków znajdującą się w pudełku bezpośrednio przed ruchem. Zaczynając od Asi, dziewczynki wykonują ruchy na przemian dopóki któraś nie wyciągnie ostatniego cukierka — tym samym wygrywając grę. W zależności od n rozstrzygnij, która dziewczynka może zapewnić sobie zwycięstwo.

Zadanie 8.

Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych (x_n) spełniający warunki $x_1 = 20, x_2 = 24$ oraz

$$x_{n+2} = \begin{cases} x_n - \frac{1}{x_{n+1}}, & \text{gdy } x_{n+1} \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x_{n+1} = 0. \end{cases}$$

dla $n \geqslant 1$. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią k, dla której $x_k = 0$, lub udowodnij, że taka liczba k nie istnieje.

Zadanie 9.

Punkt D leżący w trójkącie ABC spełnia $AD = DB$. Proste CD i AB przecinają się w punkcie E spełniającym

$$\frac{CD}{CE} = \frac{EB}{AE}.$$

Wykaż, że trójkąt AEC jest równoramienny.

Zadanie 10.

Dany jest nieskończony ciąg (a_n) dodatnich liczb całkowitych spełniający dla każdego $n \geqslant 1$ zależność

$$a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Udowodnij, że pewien wyraz tego ciągu jest liczbą złożoną.

Zadanie 11.

W pewnym kraju jest n miast, z których niektóre są połączone drogami dwukierunkowymi. Z każdego miasta można dostać się do każdego innego używając pewnej liczby dróg. Co więcej, wiemy, że z każdego miasta wychodzą drogi do co najmniej d innych miast. Wykaż, że z dowolnego miasta da się przejść do dowolnego innego przechodząc przez maksymalnie $3n/d$ innych miast.

Zadanie 12.

Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} x = (y+1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$$

Zadanie 13.

W sześciokącie foremnym $ABCDEF$ o boku 1 na przekątnej BD zaznaczamy punkt P, a na przekątnej DF zaznaczamy punkt Q tak, że

$$BP = QD = 1.$$

Wykaż, że punkty C, P, Q są współliniowe.

Zadanie 14.

Pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pomalowano w standardowy sposób na biało i czarno. *Ruchem* nazywamy wybranie kwadratu 2×2 na szachownicy i zmienienie kolorów jego pól na kolory przeciwne. Dla jakich dodatnich liczb całkowitych $n \geqslant 2$ pewną liczbą ruchów możemy sprawić, by cała szachownica była w jednym kolorze?

Zadanie 15.

Trzy cięciwy pewnego okręgu o środku w punkcie O przecinają się w jednym punkcie, różnym od O, przy czym każde dwie z tych cięciw przecinają się pod kątem 60°. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach w ich środkach jest równoboczny.

Zadanie 16.

Znajdź wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych (a, b) spełniających podzielności

$$a^2 + b^2 \mid a^3 + b \qquad \text{i} \qquad a^2 + b^2 \mid a + b^3.$$

Zadanie 17.

Dodatnią liczbę całkowitą nazwiemy *fikuśną*, jeżeli ma 70 cyfr i każda z cyfr od 1 do 7 pojawia się w jej zapisie dziesiętnym dokładnie 10 razy. Udowodnij, że żadna liczba fikuśna nie dzieli innej liczby fikuśnej.

Zadanie 18.

Dodatnie liczby całkowite a, b, c, d, e spełniają równość $abcde = a + b + c + d + e$. Znajdź największą możliwą wartość $\max\{a, b, c, d, e\}$.

Zadanie 19.

Na okręgu zaznaczono 101 parami różnych punktów. Następnie każdą z cięciw o końcach w tych punktach pokolorowano na jeden z 11 kolorów, przy czym użyto co najmniej dwóch z nich. Udowodnij, że pewien trójkąt o wierzchołkach w zaznaczonych punktach ma dwa boki jednego koloru, a trzeci innego.

Zadanie 20.

Niech M będzie środkiem boku BC trójkąta ABC. Okrąg opisany na trójkącie ABM przecina odcinek AC po raz drugi w punkcie D. Okrąg opisany na trójkącie AMC przecina natomiast odcinek AB po raz drugi w punkcie E. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie ADE leży na symetralnej odcinka BC.

Zawody drużynowe

Zadanie 21.

Dwusieczna kąta ACB trójkąta ABC przecina okrąg na nim opisany w punkcie W. Okrąg o środku w punkcie W przechodzący przez punkt C przecina prostą AC po raz drugi w punkcie D. Wykaż, że $AD = BC$.

Zadanie 22.

Każdy punkt płaszczyzny pokolorowano na jeden z trzech kolorów. Wykaż, że w rezultacie pewien trójkąt prostokątny ma jednokolorowe wierzchołki.

Zadanie 23.

Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c} \geqslant 2.$$

Zadanie 24.

Parę dodatnich liczb całkowitych (a, b) nazywamy *mraśną*, jeżeli w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb a i b występują dokładnie te same liczby pierwsze. Udowodnij, że jest nieskończenie wiele par różnych liczb całkowitych (m, n), dla których pary (m, n) oraz $(m + 1, n + 1)$ są mraśne.

Zadanie 25.

Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Oznaczmy przez D spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F różne od D leżą na pewnej prostej przechodzącej przez punkt D, przy czym spełnione są równości $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AFC = 90^\circ$. Oznaczmy przez M i N odpowiednio środki odcinków BC i EF. Udowodnij, że prosta AN jest prostopadła do prostej NM.

Zadanie 26.

Dla dodatniej liczby nieparzystej n pola szachownicy o wymiarach $n \times n$ pokolorowano na pewną liczbę kolorów. Okazało się, że w każdym kwadracie 2×2 pewne dwa pola są tego samego koloru. Wykaż, że największa możliwa liczba kolorów, jaka mogła zostać użyta, to

$$\frac{n^2 + 2n - 1}{2}.$$

Mecz matematyczny

Zadanie 27.

Rozważmy trójkąt ABC, dla którego spełniony jest warunek $2AB = BC + CA$. Wybierzmy punkt L na boku AB, dla którego prosta CL to dwusieczna kąta ACB. Okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt A przecina odcinek odcinka AC w punkcie X, a okrąg styczny do prostej CL w punkcie L przechodzący przez punkt B przecina odcinek BC w punkcie Y. Wykaż, że środek odcinka CL jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt CXY.

Zadanie 28.

Okręgi Ω i Γ są styczne zewnętrznie, a prosta l jest jedną z ich dwóch wspólnych stycznych zewnętrznych. Oznaczmy punkt styczności prostej l z okręgiem Ω przez X. Niech AX będzie średnicą okręgu Ω. Prosta przechodząca przez punkt A jest styczna do okręgu Γ w punkcie B. Udowodnij, że $AB = AX$.

Zadanie 29.

Punkt H jest ortocentrum trójkąta ABC. Prosta równoległa do prostej CH przecina proste AB, AC odpowiednio w punktach D, E. Załóżmy, że środek M odcinka DE leży na okręgu opisanym na trójkącie BDH. Wykaż, że $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ACM$.

Zadanie 30.

Wykaż, że każdą dodatnią liczbę całkowitą można zapisać jako sumę pewnej liczby składników postaci $2^a 3^b$, gdzie a, b są nieujemnymi liczbami całkowitymi, w taki sposób, by żaden ze składników nie był wielokrotnością innego.

Zadanie 31.

Dla każdej liczby całkowitej od 1 do 1000 obliczono iloczyn jej niezerowych cyfr. Następnie dodano wszystkie uzyskane wyniki. Wykaż, że uzyskana suma jest sześcianem liczby całkowitej.

Zadanie 32.

Załóżmy, że dodatnie liczby całkowite x i y spełniają

$$x^2 + x + 1 = 3y^2.$$

Wykaż, że $2y - 1$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Zadanie 33.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = -z \\ (y+z)^3 = -x \\ (z+x)^3 = -y \end{cases}$$

dla parami różnych liczb rzeczywistych x, y, z.

Zadanie 34.

Wykaż, że dla dowolnych parami różnych nieujemnych liczb rzeczywistych x, y, z zachodzi

$$\frac{x^2}{(y-z)^2} + \frac{y^2}{(z-x)^2} + \frac{z^2}{(x-y)^2} \geqslant 2.$$

Zadanie 35.

W tablicę o wymiarach $n \times n$ wpisano parami różne liczby rzeczywiste. Asia i Basia dostały po jednej kopii tej tablicy. Asia co minutę zapisuje na kartce największą liczbę widoczną w jej tablicy, a następnie zmazuje ją wraz z wszystkimi liczbami w jej kolumnie i w jej wierszu. Basia postępuje podobnie ze swoją tablicą, w każdej minucie rozważając najmniejszą widoczną liczbę. Po n minutach, gdy tablice są puste, każda z dziewczynek dodaje zapisane przez siebie liczby. Wykaż, że wynik Asi nie będzie mniejszy od wyniku Basi.

Zadanie 36.

Na polach nieskończonej szachownicy położono pewną (skończoną) liczbę kamieni. Jeśli na jakimś polu leżą co najmniej 4 kamienie, możemy zabrać z niego 4 kamienie i rozłożyć po jednym na pola sąsiednie. Wykaż, że niezależnie od naszych wyborów po pewnej liczbie takich operacji na każdym polu będą maksymalnie 3 kamienie.

Zadanie 37.

Na okrągłym stole leży 2024 działających zegarów wskazówkowych. Oznaczmy przez d sumę odległości od środka stołu do środków tarczy tych zegarów. Udowodnij, że w pewnym momencie suma odległości między środkiem stołu a końcami wskazówek minutowych będzie nie mniejsza niż d.

Zadanie 38.

Na okręgu leży 1000 pudełek, każde zawierające pewną liczbę żetonów. W jednym ruchu możemy wyjąć wszystkie żetony z dowolnego pudełka i rozmieścić je, umieszczając po jednym żetonie w kolejnych pudełkach — zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Wykaż, że dowolny początkowy rozkład 2024 żetonów w pudełkach można przekształcić w dowolny inny rozkład za pomocą ciągu ruchów opisanych wyżej.