

7th Czech–Polish–Slovak
Junior Mathematical Competition

Individual contest

(Monday, 21 May 2018)



1. Czy dla każdej trójki dodatnich liczb rzeczywistych x, y, z istnieje czwórka liczb rzeczywistych (a, b, c, d) o tej własności, że

$$ad + bc = x, \quad ac + bd = y, \quad ab + cd = z$$

oraz jedna z liczb a, b, c, d jest równa sumie trzech pozostałych?

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, którego boki AB i DE są równoległe. Każda z przekątnych AD, BE, CF dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych obwodach. Wykaż, że te trzy przekątne przecinają się w jednym punkcie.
3. Nauczycielka rozdała każdemu ze swoich 37 uczniów po 36 kredek w różnych kolorach. Okazało się, że każda para uczniów otrzymała dokładnie jedną kredkę tego samego koloru. Wyznacz najmniejszą możliwą liczbę różnych kolorów rozdanych kredek.
4. Wyznacz najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą A o nieparzystej liczbie cyfr i o tej własności, że zarówno A , jak i liczba B powstała poprzez usunięcie środkowej cyfry liczby A , są podzielne przez 2018.
5. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Punkt E leży na boku AC tego trójkąta, przy czym $AB = AE$. Odcinek AD jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie ABC , a punkt S jest środkiem tego łuku BC tego okręgu, do którego nie należy punkt A . Punkt F jest symetryczny do punktu D względem punktu S . Udowodnij, że proste FE oraz AC są prostopadłe.

Version: Polish

Time: 210 min